

מתמטיקה א

פרק 18 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה..... 1
2. פתרון משוואות פולינומיאליות..... 3
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות..... 5

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

הוכח שלמשוואות בשאלות 1-3 יש בדיוק פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3)$$

(4) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ונתון כי $b^2 < 3ac$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

עבור כל אחת מהמשוואות 5-6, מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה:

$$e^{x-1} = x \quad (5)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (6)$$

(7) תהי f פונקציה גזירה לכל x , המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכח שלמשוואות בשאלות 8-10 יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (10) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (9) \quad e^x - 5x = 0 \quad (8)$$

בכל אחת מהמשוואות 11-13, מצא קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (11)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (12)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (13)$$

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) פתרון יחיד.

(5) $x = 1$ (6) $x = -4$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) $b^2 - 4ac = 0$ (12) $4b^2 - 12ac < 0$ (13) $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

צמצם עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

פתור את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (4)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (5)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (7)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (9)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (10)$$

$$7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x-2} \quad (3)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (4)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (6)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (7)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (8)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (9)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (10)$$

$$(11) \text{ פתרון מקורב: } x = 0.8459.$$

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון):

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (1)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$(1) \text{ פתרון מדויק } x = -1$$

$$(2) \text{ פתרונות מקורבים: } x = 0.5576, x = 1.9672$$