

# קורס השלמה למתמטיקה

פרק 24 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה.....1
2. פתרון משוואות פולינומאליות.....4
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות.....6

## מציאת מספר הפתרונות של משוואה

### שאלות

הוכח שלמשוואות בשאלות 1-4 יש בדיוק פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4)$$

(5) נתונה המשוואה  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , ונתון כי  $b^2 < 3ac$ . מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

עבור כל אחת מהמשוואות 6-9, מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה:

$$e^{x-1} = x \quad (6)$$

$$\arctan x - x = 0 \quad (7)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (8)$$

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (9)$$

(10) תהי  $f$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0)=1$ ,  $f(1)=2$ ,  $f'(x) \leq 1$ . הוכח שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש בדיוק פתרון אחד.

הוכח שלמשוואות בשאלות 11-13 יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (13) \qquad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (12) \qquad e^x - 5x = 0 \quad (11)$$

בכל אחת מהמשוואות 14-17, מצא קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (14)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (15)$$

$$x + a \cos(bx) = 1 \quad (16)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (17)$$

(18) הוכיחו שלמשוואה  $x^2 + x^3 + 5x = 1$  יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.  
הערה: שאלה זו עליך לפתור תוך שימוש במשפט רול.

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) פתרון יחיד.
- (6)  $x = 1$
- (7)  $x = 0$
- (8)  $x = -4$
- (9)  $x = 0$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14)  $b^2 - 4ac = 0$
- (15)  $4b^2 - 12ac < 0$
- (16)  $\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1$
- (17)  $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
- (18) שאלת הוכחה.

## פתרון משוואות פולינומאליות

### שאלות

צמצם עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3 :

$$(1) \quad \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

$$(2) \quad \frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10}$$

$$(3) \quad \frac{4x^2 + x - 1}{x - 2}$$

פתור את המשוואות הבאות :

$$(4) \quad k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0$$

$$(5) \quad k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0$$

$$(6) \quad k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0$$

$$(7) \quad k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$

$$(8) \quad k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0$$

$$(9) \quad k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

$$(10) \quad k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0$$

$$(11) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0$$

### תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x-2} \quad (3)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (4)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (6)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (7)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (8)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (9)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (10)$$

$$(11) \text{ פתרון מקורב: } x = 0.8459.$$

## שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון):

$$(1) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3$$

$$(2) \quad -4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{פתרון מדויק } x = -1$$

$$(2) \quad \text{פתרונות מקורבים: } x = 0.5576, \quad x = 1.9672$$