

# סדנה באנליזה מתמטית למדעים מדוייקים 80155

פרק 8 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

1. המשיק ..... 1
2. בעיות משיקים ..... 4
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק ..... 6
4. הנורמל ..... 9
5. זווית שבין שתי עקומות ..... 10
6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם ..... 11

## המשיק

### שאלות

- (1) מצא את שיפוע הפונקציה  
 א.  $f(x) = 2x^3 - 7x$ , בנקודה  $(2, 2)$ .  
 ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ , בנקודה  $x = -2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ , כאשר  $a > 0$ .  
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.  
 מצא את הקבוע  $a$ .
- (3) הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $h(x) = 3\sqrt{x}$ .  
 מצא את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ , בנקודה  $(1, 15)$ , הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ , בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ , הוא  $\frac{e}{3}$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (6) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$ , לגרף הפונקציה  
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ? לכל ערך  $k$  כזה מצא את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .  
 א. שרטט את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות  $x = 3$  ו- $x = 1$ .  
 ב. חשב את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א', עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$ .

מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(9) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ .

מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(10) פונקציה  $f(x)$  גזירה ברציפות ב- $0$  ומקיימת  $f(0) = 0$ .

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $30^\circ$ .

חשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

(11) מצא את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בנקודות  $x = 1$  ו- $x = 0$ .

**תשובות סופיות**

**(1)** א. 17 ב. 4

**(2)**  $a = 2$

**(3)** (1,3)

**(4)**  $a = 2, b = -1$

**(5)**  $a = 2, b = -2$

**(6)** לערך  $k = 6$ , בנקודה  $x = 1$ ; לערך  $k = \frac{158}{27}$ , בנקודה  $x = \frac{1}{3}$ .

**(7)** א. ראו באתר. ב.  $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

**(8)**  $x = 5, x = -1$

**(9)**  $x = 1, x = \frac{1}{3}$

**(10)**  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**(11)**  $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצא את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצא את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6)  $(2, -3)$ ,  $y = x^2 - 2x + 1$

(7)  $(-3, 1)$ ,  $y = \sqrt{x}$

(8) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.

מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

### תשובות סופיות

- (1) נקודת ההשקה היא  $(-1,5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .
- (2) נקודת ההשקה היא  $(4,12)$  ו-  $b = 4$ .
- (3) נקודת ההשקה היא  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .
- (4) נקודת ההשקה היא  $(0,1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .
- (5) משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .
- (6)  $y = 6x - 15, (4,9)$  ;  $y = -2x + 1, (0,1)$
- (7) המשיק  $(9,3)$ ,  $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .
- (8)  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$
- (9) נקודת ההשקה  $(1,1)$ ,  $k = 1.5$ .

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

- (1) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה  $x = -1$ .
- (2) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.
- (3) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  בנקודה  $x = 0$ .
- (4) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה  $x_1 = 1$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה  $y = 2$ , הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.
- (6) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ , היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  ששיפועו -2.
- (8) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה  $x_1 = 2$ .
- (9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה  $(1,6)$ , הוא -6. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ , ואת משוואת המשיק.
- (10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$ . מצא את משוואת המשיק.

**(11)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  , בנקודה  $x = 0$  .

**(12)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  , בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$  .

**(13)** לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$  . מצא את משוואת המשיק.

**(14)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$  , בנקודה  $x = 1$  .

**(15)** הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו-  $g(x) = 1 - x$  נחתכים בנקודה A , ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצא את משוואת המשיק והוכח שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**(16)** מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$  , דרך הנקודה (1,1) , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(17)** מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$  , דרך הנקודה (1,2) , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(18)** מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  בנקודה (3,4) .

### תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (17)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (18)$$

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצא את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3,2)$ .
- (2) מצא את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5,0)$  ו- $(2,4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצא את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2,1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

(1) מצא את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו-  $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .

(2) מצא את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .

(3) הוכח שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

(1)  $71.57^\circ$

(2)  $71.56^\circ$

(3) שאלת הוכחה.

## נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

### שאלות

(1) חשב בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{27}$

(2) חשב בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\ln 2$ ,  $\sqrt[3]{9}$

### תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$