GOOL
בשביל התירגול

חדוא 1 מוגבר

פרק 17 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

משפט רול

שאלות

1) בדוק האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצא את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\qquad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\qquad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

2) נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראה ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה c, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמק.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0,x_1,x_2, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכח שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

4) תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכח שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

5) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראה שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

6) נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכח כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

7) נתונה פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי g מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$.
הראה כי g גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכח כי הנגזרת, g',
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

8) הוכח:
אם f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכח שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}=2\frac{f'(c)}{f(c)}$.

10) אם $c_0+\frac{c_1}{2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$,
הוכח שלמשוואה $c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

11) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראה שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

12) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\neq g'(x)f(x)$.
הראה שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכח שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכח שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכח שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשב את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכח שקיים n טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

15) תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל n טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשב את $f''(1)$.

16) נתון כי f,g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.
הוכח שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.
A קבוע כלשהו.

17) נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.
תהי x_0 נקודה כלשהי.
הוכח כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפת אחת ויחידה - x_0.
במילים אחרות: הוכח כי הגרף של $y=f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או מתחתיו.

18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a,b), ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.
נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.
הוכח שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.
תן דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

תשובות סופיות

1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

14) א. 0 ב. הוכחה.

15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם :

1) $$\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a} \qquad (0<a<b)$$

2) $$\frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}} \qquad (0<a<b)$$

3) $$(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b} \qquad (a<b)$$

4) $$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b} \qquad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$$

5) $$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2} \qquad (0<a<b)$$

6) $$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \qquad (0<a<b<1)$$

7) $$\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad (0<a<b)$$

8) $$\frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\frac{b-a}{1-b^2} \qquad (0<a<b<1)$$

9) $(0<a<b) \quad \sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$

10) $(1<a<b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$

11) $(1<a<b<3) \quad \ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$

12) $(x_1<x_2) \quad |\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$

13) $(x_1<x_2) \quad |\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$

14) $(x<y) \quad |\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $x < \tan x < \dfrac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

2) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ $(x > 0)$

3) $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < x < 1)$

4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x$ $(x > 0)$

5) $x < \operatorname{arctanh}(x) < \dfrac{x}{1-x^2}$ $(0 < x < 1)$

6) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ $(x > 0)$

7) $1 + x < e^x < 1 + xe^x$ $(x > 0)$

8) $\sin x \le x$ $(x > 0)$

9) $\tan x < 4x$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{3}\right)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכח את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3}<\ln\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}+1<\sqrt{2}<1.5$

3) $\frac{3}{25}+\frac{\pi}{4}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15}+\frac{\pi}{6}<\arcsin(0.6)<\frac{1}{8}+\frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – שאלות כלליות

שאלות

1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$, $f(1)=3$.
הוכח כי $f(2)=8$.

2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$, $f(1)=3$.
הוכח כי $4\le f(2)\le 10$.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$,
וכן שקיימת נקודה c, כאשר $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)>0$.
הוכח שקיימת נקודה m בקטע (a,b), כך ש- $f''(m)<0$.

4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), כך ש- f' חסומה בקטע (a,b).
א. הוכח שקיים $M>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b) מתקיים:
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכח ש- f רציפה במידה שווה ב- (a,b).
כלומר, הוכח שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל x ו- y ב- (a,b),
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5) נניח כי f רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$, ו- f' מונוטונית עולה.
א. הוכח כי $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכח כי $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.

6) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- (a,∞).
נתון כי: $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכח כי: $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

7) נניח כי f גזירה ב- $(0,\infty)$.
א. נתון כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.
ב. נתון כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתון: f גזירה ב- $\mathbb{R}$, K קבוע ממשי.
הוכח: $\lim_{x\to\infty} f'(x)=K \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=K$.
ב. ללא שימוש בכלל לופיטל, חשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

9) נניח כי f גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$?
הוכח או הפרך את תשובתך.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

10) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכח שקיים לכל היותר c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

11) תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכח שקיים בדיוק c אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.

12) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a,b]$.
הוכח שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש- $c_2\ne c_3$ ו- $f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.
נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו- $(1,f(1))$,
חותך את הגרף של f בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.
הוכח שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש- $f''(x_0)=0$.

14) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח ש- f גזירה ב- (a,b) ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.
הוכח כי $f'_+(a)$ קיים וש- $f'_+(a)=L$.

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.
נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\le|f(x)|$.
הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

16) נתון כי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b).
א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכח כי f קבועה ב- $[a,b]$.
ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכח כי f לינארית ב- $[a,b]$.

17) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתון כי f,g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).
ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכח כי $f(x)=g(x)+c$ ב- $[a,b]$.
ב. הוכח כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

18) נתון כי f גזירה בקטע (a,b), ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.
הוכח כי f' לא חסומה בקטע.

תשובות סופיות

8) ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

שאלות

1) הוכח שלכל $1 \le a < b$ מתקיים $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

2) הוכח, כי עבור כל $a,\ b$ המקיימים $0 < a < b < 1$,
מתקיים $\frac{b}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{a}{1+a^2}$.

3) הוכח, כי עבור כל $a,\ b$ המקיימים $1 < a < b$,
מתקיים $\frac{2\sqrt{a}}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{b}}{1+b^2}$.

4) הוכח כי $|\tan y - \tan x| \le 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

5) הוכח כי $\arctan x > \ln(1+x)$ לכל $x \in (0,1)$.

6) הוכח שלכל $x \ne 0$ מתקיים $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$.

7) תהי f פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$.
הוכח שבקטע $(0,1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$.

8) תהי f פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$, ויהי n מספר טבעי כלשהו.
הוכח שקיים $0 < c < 1$, המקיים $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

9) יהיו a ו-b מספרים חיוביים כלשהם.
הוכח שקיים פתרון למשוואה $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$.

10) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a,b]$, כאשר $a \ge 0$.

הוכח שקיימים $c_1, c_2 \in [a,b]$, כך ש- $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$.

11) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.

הוכח שלמשוואה $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$

קיים פתרון בקטע $[a,b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט דרבו

שאלות

1) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases}$?

2) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$?

3) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$?

4) האם קיימת פונקציה גזירה f, שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$?

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח:
אם f' לא רציפה ב- x_0, אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$,
שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\neq 0\end{cases}$?

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח:
אם f' לא רציפה ב- x_0, אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה f גזירה ב- $\mathbb{R}$,
שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ 4x & x<1\end{cases}$?

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח:

אם f' לא רציפה ב- x_0, אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq\pm\infty$.

כלומר, x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$?

8) האם קיימת פונקציה f, גזירה ב- $[0,1]$,

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$?

9) תהי f פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$, ונניח כי $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=1$.

הוכח שקיים $x\in(0,2)$, שעבורו $f'(x)=\frac{1}{4}$.

10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a,b), ומקיימת $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכח כי f מונוטונית בקטע (a,b).

11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).
האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס?
הוכח או הפרך את תשובתך.

תשובות סופיות

1) לא.
2) לא.
3) לא.
4) לא.
5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
8) לא.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il