

חדוא 2

פרק 11 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

1. משפט רול..... 1
2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$ 5

משפט רול

שאלות

- (1) בדוק האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצא את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$

ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$

(2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

- הראה ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$.
האם הדבר סותר את משפט רול? נמק.

- (3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- \mathbb{R} ,
ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0, x_1, x_2 , עבורן $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$.
הוכח שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c) = 0$.

- (4) תהי $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
הוכח שקיימת $x_0 \in (0, 1)$, כך ש- $f'''(x_0) = 0$.

- (5) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שמתקיים $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.
הראה שלמשוואה $f'''(x) = 0$ יש פתרון.

- (6) נתון כי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0 = 2$.
הוכח כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

- (7) נתונה פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} .
 תהי g מוגדרת על ידי $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$.
 הראה כי g גזירה ב- \mathbb{R} , והוכח כי הנגזרת, g' , מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1, 1)$.
- (8) הוכח:
 אם f גזירה ב- \mathbb{R} ו- $f(1) = 0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי $g(x) = xf(x)$, גזירה ב- \mathbb{R} , וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x) = 0$.
- (9) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $0 < x \leq 1$.
 הוכח שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$.
- (10) אם $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$, $(c_i \in \mathbb{R})$
 הוכח שלמשוואה $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0, 1)$.
- (11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
 הראה שלמשוואה $f'(x) = 2x$ קיים פתרון בקטע $(0, 1)$.
- (12) תהיינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
 נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$.
 הראה שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g .
- (13) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
 כך ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$.
 א. הוכח שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
 ב. הוכח שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
 ג. הוכח שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0, 1)$.

(14) ענה על הסעיפים הבאים :א. תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשב את $f''(0)$.ב. תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0) > 0$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי } n$$

(15) תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשב את $f''(1)$.**(16)** נתון כי f, g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$ ב- \mathbb{R} .הוכח שלמשוואה $f(x)g(x) = A$ יש לכל היותר פתרון אחד. A קבוע כלשהו.**(17)** נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- \mathbb{R} .תהי x_0 נקודה כלשהי.הוכח כי לגרף של $y = f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפתאחת ויחידה - x_0 .במילים אחרות: הוכח כי הגרף של $y = f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

(18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a, b) , ולכל $x \in (a, b)$ מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה $f'(x) = 0$ יש שלושה פתרונות בקטע.הוכח שלמשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.תן דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$.

תשובות סופיות

(1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. כן, $2 - \sqrt{3}$

(2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.

(14) א. 0 ב. הוכחה.

(15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il