

חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 9 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

1. משפט רול..... 1
2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$ 5
3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$ 7
4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים..... 8
5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות..... 9

משפט רול

שאלות

(1) בדוק האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצא את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$

ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$

(2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

הראה ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$.
האם הדבר סותר את משפט רול? נמק.

(3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- \mathbb{R} ,
ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0, x_1, x_2 , עבורן $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$.
הוכח שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c) = 0$.

(4) תהי $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
הוכח שקיימת $x_0 \in (0, 1)$, כך ש- $f'''(x_0) = 0$.

(5) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שמתקיים $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.
הראה שלמשוואה $f'''(x) = 0$ יש פתרון.

(6) נתון כי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0 = 2$.
הוכח כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

- (7) נתונה פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} .
 תהי g מוגדרת על ידי $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$.
 הראה כי g גזירה ב- \mathbb{R} , והוכח כי הנגזרת, g' , מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1, 1)$.
- (8) הוכח:
 אם f גזירה ב- \mathbb{R} ו- $f(1) = 0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי $g(x) = xf(x)$, גזירה ב- \mathbb{R} , וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x) = 0$.
- (9) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $0 < x \leq 1$.
 הוכח שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$.
- (10) אם $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$, $(c_i \in \mathbb{R})$
 הוכח שלמשוואה $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$ יש לפחות אחד בקטע $(0, 1)$.
- (11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
 הראה שלמשוואה $f'(x) = 2x$ קיים פתרון בקטע $(0, 1)$.
- (12) תהיינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
 נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$.
 הראה שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g .
- (13) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
 כך ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$.
 א. הוכח שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
 ב. הוכח שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
 ג. הוכח שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0, 1)$.

(14) ענה על הסעיפים הבאים :א. תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשב את $f''(0)$.ב. תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0) > 0$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי } n$$

הוכח שקיים n טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1$.**(15)** תהי $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשב את $f''(1)$.**(16)** נתון כי f, g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$ ב- \mathbb{R} .הוכח שלמשוואה $f(x)g(x) = A$ יש לכל היותר פתרון אחד. A קבוע כלשהו.**(17)** נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- \mathbb{R} .תהי x_0 נקודה כלשהי.הוכח כי לגרף של $y = f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפתאחת ויחידה - x_0 .במילים אחרות: הוכח כי הגרף של $y = f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

(18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a, b) , ולכל $x \in (a, b)$ מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה $f'(x) = 0$ יש שלושה פתרונות בקטע.הוכח שלמשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.תן דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$.

תשובות סופיות

- (1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. כן, $2 - \sqrt{3}$
- (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.
- (14) א. 0 ב. הוכחה.
- (15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

שאלות

הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2)$$

$$(0 < x < 1) x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x \quad (4)$$

$$(0 < x < 1) x < \operatorname{arctanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6)$$

$$(x > 0) 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(x > 0) \sin x \leq x \quad (8)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \tan x < 4x \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכח את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – שאלות כלליות

שאלות

- (1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 5$.
 ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.
 הוכח כי $f(2) = 8$.
- (2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 7$.
 ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.
 הוכח כי $4 \leq f(2) \leq 10$.
- (3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$, ונניח ש- $f(a) = f(b) = 0$.
 וכן שקיימת נקודה c , כאשר $c \in (a, b)$, כך ש- $f(c) > 0$.
 הוכח שקיימת נקודה m בקטע (a, b) , כך ש- $f''(m) < 0$.
- (4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) , כך ש- f' חסומה בקטע (a, b) .
 א. הוכח שקיים $M > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) מתקיים:
 $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$
 ב. הוכח ש- f רציפה במידה שווה ב- (a, b) .
 כלומר, הוכח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) ,
 המקיימים $|x - y| < \delta$, מתקיים $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- (5) נניח כי f רציפה ב- $[0, \infty)$ וגזירה ב- $(0, \infty)$.
 כמו כן, $f(0) = 0$, ו- f' מונוטונית עולה.
 א. הוכח כי $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ ב- $(0, \infty)$.
 ב. הוכח כי $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0, \infty)$.

(6) תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, \infty)$ וגזירות ב- (a, ∞) .
נתון כי: $f(a) = g(a)$ ו- $f'(x) \leq g'(x)$ לכל $x > a$.
הוכח כי: $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \geq a$.

(7) נניח כי f גזירה ב- $(0, \infty)$.

א. נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

ב. נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון f גזירה ב- \mathbb{R} , K קבוע ממשי.

הוכח: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = K \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = K$.

ב. ללא שימוש בכלל לופיטל, חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

(9) נניח כי f גזירה ב- \mathbb{R} .

האם נכון לומר כי מתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$?

הוכח או הפרך את תשובתך.

הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז', הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

(10) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

הוכח שקיים לכל היותר c אחד ב- $[0, 1]$, כך ש- $f(c) = c$.

(11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x) < 0$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

הוכח שקיים בדיוק c אחד ב- $[0, 1]$, כך ש- $f(c) = c^2$.

(12) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a, b]$.

הוכח שקיימים $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$, כך ש- $c_2 \neq c_3$ ו- $f'(c_1) = \frac{f'(c_2) + f'(c_3)}{2}$.

(13) תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים. נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0, f(0))$ ו- $(1, f(1))$, חותך את הגרף של f בנקודה $(a, f(a))$, כאשר $0 < a < 1$. הוכח שקיים $x_0 \in [0,1]$, כך ש- $f''(x_0) = 0$.

(14) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח ש- f גזירה ב- (a,b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$, כאשר $L \in \mathbb{R}$. הוכח כי $f'_+(a) = L$ קיים וש- $f'_+(a) = L$.

(15) תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0) = 0$. נניח שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f'(x)| \leq |f(x)|$. הוכח כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0,1]$.

(16) נתון כי f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) .
 א. ידוע כי $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a,b)$. הוכח כי f קבועה ב- $[a,b]$.
 ב. ידוע כי $f'(x) = m$ לכל $x \in (a,b)$. הוכח כי f לינארית ב- $[a,b]$.

(17) ענה על הסעיפים הבאים:
 א. נתון כי f, g רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) . ידוע כי $f'(x) = g'(x)$ לכל $x \in (a,b)$. הוכח כי $f(x) = g(x) + c$ ב- $[a,b]$.
 ב. הוכח כי $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

(18) נתון כי f גזירה בקטע (a,b) , ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. הוכח כי f' לא חסומה בקטע.

תשובות סופיות

8. ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il