

מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 13 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ.....1

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות 1-3 אשר את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$,

והראה שהם שווים זה לזה (\mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S). (ראה הערת סימון בעמוד הבא)

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G , הנקבעת ע"י המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G , הנקבעת ע"י המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$. חשב את השטף של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ דרך S . כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי: $x=0, x=3, z=4 - y^2, z=0$.

(6) חשב את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dx dy$, כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16, 0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים). חשב את השטף דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$. כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר \mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1 + y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\text{מתקיים: } \iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

(3) הערך המשותף הוא 27.

(4) 279π

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) -4π