

כלים מתמטיים לפיזיקה

פרק 20 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס.....1

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

(1) $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$.

(2) $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $2x + z = 6$, $y = 2$, ושאינו כלול
א. במישור xy .
ב. במישור $y = 2$.
ג. במישור $2x + z = 6$.

(4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$; ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, כאשר $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$, ומעל למישור xy .

$$(7) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$$

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא 12π .

(2) הערך המשותף הוא -16π .

(3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7) 12π