

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 43 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס.....1

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות 1-3 בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

$$(1) \quad \mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}; \quad S \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0.$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור } xy.$$

$$(3) \quad \mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים } y = 2, 2x + z = 6, \text{ ושאינו כלול א. במישור } xy. \\ \text{ב. במישור } y = 2. \\ \text{ג. במישור } 2x + z = 6.$$

$$(4) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz, \text{ כאשר } C \text{ עקומה בצורת מלבן מ-}(0,0,0) \text{ ל-}(0,3,3), \text{ משם ל-}(1,3,3) \text{ ומשם ל-}(1,0,0).$$

$$(5) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}; \\ \text{ו-} C \text{ היא שפת המשולש, שקדקודיו הם } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). \\ \text{וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה-} z).$$

$$(6) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}; \text{ ו-} S \text{ הוא החלק של הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ הכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1, \text{ ומעל למישור } xy.$$

$$(7) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$$

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא 12π .

(2) הערך המשותף הוא -16π .

(3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7) 12π