

## חדו"א 2

פרק 30 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס.....1

## משפט סטוקס

### שאלות

בשאלות 1-3 בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים.

כלומר, חשב את האינטגרל  $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ , ואת האינטגרל  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ,

והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בעמוד הבא).

$$(1) \quad \mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}; \quad S \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0.$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא שפת חצי כדור שמרכזו}$$

בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור  $xy$ .

$$(3) \quad \mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}; \quad S \text{ הוא משטח התחום בשמינית הראשונה,}$$

החסום על ידי המישורים  $y = 2$ ,  $2x + z = 6$ , ושאינו כלול

א. במישור  $xy$ .

ב. במישור  $y = 2$ .

ג. במישור  $2x + z = 6$ .

$$(4) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz, \text{ כאשר } C \text{ עקומה בצורת מלבן}$$

מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,3,3)$ , משם ל- $(1,3,3)$  ומשם ל- $(1,0,0)$ .

$$(5) \quad \text{חשב את האינטגרל } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k};$$

ו- $C$  היא שפת המשולש, שקדקודיו הם  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,

וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- $z$ ).

$$(6) \quad \text{חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}; \text{ ו-} S \text{ הוא החלק של}$$

הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$ , ומעל למישור  $xy$ .

$$(7) \text{ חשב את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$$

ו- $S$  הוא משטח החרוט  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , מעל למישור- $xy$ .

### הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי  $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

### תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא  $12\pi$ .

(2) הערך המשותף הוא  $-16\pi$ .

(3) הערך המשותף הוא: א.  $-6$       ב.  $-9$       ג.  $-18$

(4)  $-90$

(5)  $-1$

(6)  $0$

(7)  $12\pi$