

# אנליזה מודרנית

פרק 5 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון..... 1
2. נגזרות חלקיות מסדר שני..... 3
3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה..... 7
4. דיפרנציאביליות..... 9

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות 1-10 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \quad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad .(f_x \text{ רק})$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \quad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \quad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \quad \text{נתון}$$

$$. \text{ הוכח כי } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$. f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \quad \text{נתון}$$

$$\text{חשב } \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

## הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

## תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x+y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x+y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \qquad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1+(2x+3y)^2} \qquad f_x = \frac{2}{1+(2x+3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \qquad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \qquad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \qquad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

## הערת סימון

	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow$	$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
	$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

## נגזרות חלקיות מסדר שני

### שאלות

בשאלות 1-14 חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשב  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

16) חשב  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

17) חשב  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

18) נתון  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשב  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

### הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

## תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \qquad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \qquad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{xy} = -40 \sin(10x+4y) \qquad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z \qquad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (18)$$

$$16$$

## נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

### שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?  
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(3) \quad \text{מצא את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכח שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. הוכח שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה  $(0, 0)$  וחשב אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.  
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

$$6 \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדוק האם  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

ג. האם  $f_{xyxy}(1, 4) = f_{yxxy}(1, 4)$ .

**הערה**

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

### תשובות סופיות

1) א.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . ב. לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2)  $f_x(0, 0) = 1$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

3)  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

4) א. שאלת הוכחה. ב.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ .

$$5) \quad \text{א.} \quad f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6) א.  $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה  $(0, 0)$ . ג. כן.

## דיפרנציאביליות

### שאלות

בשאלות 1-4 בדוק האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \text{ בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון } m, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי  $f$  פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \text{ נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון } f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכח ש- $\phi$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(9) \quad \text{בדוק דיפרנציאביליות } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0, 0)$ .

$$(10) \quad \text{נתונה } f: R^n \rightarrow R \text{ המוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם  $f$  דיפרנציאבילית בנקודה  $x = 0$ ?

**תשובות סופיות**

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א.  $m > 1$       ב.  $m > 0$       ג.  $m > 2$
- (7) א.  $m < 1$       ב. לכל  $m$       ג.  $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.