חשבון אינפיניטסימלי

פרק 4 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **6-1** חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

7) נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכח כי: $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

8) נתון: $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשב: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$

תשובות סופיות

1) $f_x=12x^2-6xy^2+2$ $\quad f_y=-6x^2y+3$

2) $f_x=5x^4\ln y$ $\quad f_y=\dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x=2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$

4) $f_x=6x^2+6xy+2y^3$ $\quad f_y=6xy^2+12y^3+3x^2$

5) $f_x=\dfrac{x^2+2xy^2+3y}{\left(x+y^2\right)^2}$ $\quad f_y=\dfrac{-3x+3y^2-2x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}$

6) $f_x=y^2z^3$ $\quad f_y=2xyz^3$ $\quad f_z=3xy^2z^2$

7) שאלת הוכחה.

8) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)=-1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)=-2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)=4$

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-13** חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y,z)=xyz$

14) חשב $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

15) חשב $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

16) חשב $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

17) נתון: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשב: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{ll}
f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2\\
f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22}\\
f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21}
\end{array}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$, $f_{xx} = 8 - 2y^2$, $f_y = -2x^2 y + 10$
$f_{yy} = -2x^2$, $f_{xy} = -4xy$, $f_{yx} = -4xy$

2) $f_x = 4x^3 \ln y$, $f_{xx} = 12x^2 \ln y$, $f_y = \frac{x^4}{y}$
$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$, $f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$, $f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

3) $f_x = 3x^2 - 6y$, $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3y^2 - 6x$
$f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = 6$, $f_{yx} = -6$

4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$, $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$
$f_{yy} = 6y - 6$, $f_{xy} = -3$

5) $f_x = 2xy - y^2$, $f_{xx} = 2y$, $f_y = x^2 - 2xy$
$f_{yy} = -2x$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$
$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$
$f_{xx} = 2\left[8y - 0 - 24\right]$, $f_{yy} = 2\left[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0\right]$
$f_{xy} = 2\left[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0\right]$

7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$, $f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$
$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$
$f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$
$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$, $f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$
$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$
$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$
$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$, $f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2 y - 4y^3\right)$
$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$
$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2 y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$
$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

10)

$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

11)

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\qquad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

12)

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

13)

$f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$ $\quad f_y=xz$

$f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$ $\quad f_z=xy$ $\quad f_{zx}=y$

$f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

14) -2

15) -1

16) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

17) $\dfrac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$