

תורת ההסתברות

פרק 42 - נוסחת התוחלת השלמה (תוחלת של משתנה מותנה)

תוכן העניינים

1. כללי 1

נוסחת התוחלת השלמה:

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y , מתקיים: $E(X) = E[E(X/Y)]$.

עבור משתנה Y בדיד כלשהו: $E(X) = \sum_y E(X|Y=y) \cdot P(Y=y)$.

עבור משתנה Y רציף כלשהו: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) \cdot f(y) dy$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.

בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.

בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.

המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.

יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.

יש לחשב את $E(X)$.

שאלות:

(1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי. אם הכדור ירוק מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1. אם הכדור כחול מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5. אם הכדור אדום מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית. חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

(2) מטיילים n מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש. כעת מטיילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות n את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.

(3) בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 2. אם הוגרל המספר 0 זוכים ב-15₪. אחרת זוכים ב-50₪. חשבו את תוחלת סכום הזכיה.

(4) נתון ש- $Y/X \sim U(0, X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 2 \leq x \leq 6 \\ 0.2 & 6 < x \leq 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{הינה:}$$

חשבו את $E(Y)$.

(5) בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים: נקודה A - שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא. נקודה B - שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא ונקודה C - המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום. המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב- X את זמן ההגעה לנקודת הסיום. חשבו את $E(Y)$.

תשובות סופיות:

(1) 4.4.

(2) $\frac{n}{4}$.

(3) 46.4.

(4) 3.05.

(5) .5