

מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 40 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום.....1
2. הנגזרת ושימושיה.....2
3. שימושי האינטגרל המסוים.....3

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) לפניך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

(1) א. $y = x - 1, x \geq 1$ ב. $y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$ ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$

(2) א. $x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4$ ב. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$ ג. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

(3) א. $y = (x+4)^2$ ב. $\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$ ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$ ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1$ ה. $x^2 + y^2 = 25$ ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) חשב את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. חשב את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצא את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצא את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

$$(3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. מצא את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצא את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$(1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x + 3 \quad \text{ד. } y = -0.5x + 3$$

$$(3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm \sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6)$$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

(1) חשב את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

(2) חשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $a, b > 0$

* שים לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

(3) חשב את השטח הכלוא בין העקום $0 \leq t \leq \pi$, $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ לבין ציר ה- x .

(4) חשב את השטח הכלוא בין העקום $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = 4 \cos t$, $y = \sin^2 t$ לבין ציר ה- x .

(5) חשב את אורך העקום $0 \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

(6) חשב את אורך העקום $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$, מהנקודה $(1, 0)$ לנקודה $(-1, \pi)$.

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצא את המרחק שהחלקיק עבר והשווה אותו לאורך העקום עצמו.

(8) חלק העקום $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, שבין $t = 0$ לבין $t = \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(9) חלק העקום $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, שבין $t = 0$ לבין $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(10) חשב את אורך העקום $-\pi \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$

11) חשב את אורך העקום $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$, $1 \leq t \leq 3$.

תשובות סופיות

(1) $8/3$

(2) πab

(3) 1.5π

(4) $16/3$

(5) 8

(6) 4

(7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

(8) $4\pi r^2$

(9) $6\pi/5$

(10) $6\pi\sqrt{29}$

(11) $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$