חדוא 1

פרק 30 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

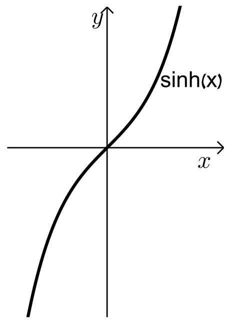
סיכום כללי

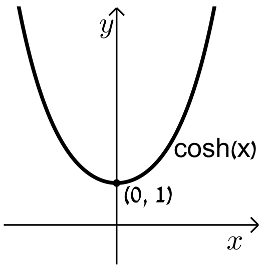
הפונקציות ההיפרבוליות הן:

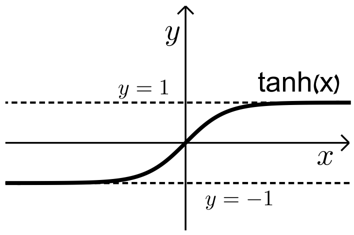
$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

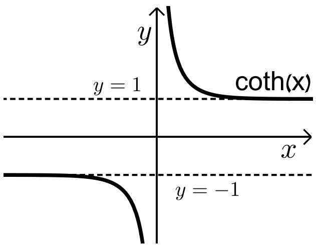
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים









שאלות

1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x=1$.

2) נתון כי $\sinh(x_0)=-1$.
חשב את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו-$\coth(x_0)$.

3) חשב: $\sinh(\ln 5)$.

4) חשב: $\tanh(-3\ln 2)$.

תשובות סופיות

1) 1.175

2) $\cosh(x_0)=\sqrt{2}\ ,\ \tanh(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \coth(x_0)=-\sqrt{2}$

3) 2.4

4) $-\frac{63}{65}$

זהויות עם פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

<u>טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות</u>

ארגומנט שלילי	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	סינוס וקוסינוס היפרבוליים
$\cosh(-x)=\cosh(x)$	$1+\tanh^2(x)=\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(x)\pm\sinh(x)=e^{\pm x}$
$\sinh(-x)=-\sinh(x)$	$\coth^2(x)-1=\dfrac{1}{\sinh^2(x)}$	$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

סכום והפרש ארגומנטים
$\sinh(x\pm y)=\sinh(x)\cosh(y)\pm\cosh(x)\sinh(y)$
$\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$

זהויות של ארגומנט כפול
$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$
$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\sinh^2(x)+1=2\cosh^2(x)-1$

שאלות

1) הוכח את הזהות $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$.

2) הוכח את הזהות הכפולה $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}=\frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$,
בתחום $x\ge 0$.

3) הוכח את הזהות $\cosh^4(x)-\sinh^4(x)=\cosh(2x)$.

4) הוכח את הזהויות $\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות של פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות :

$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$(\sinh(x))' = \cosh(x)$
$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$(\cosh(x))' = \sinh(x)$

שאלות

1) גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln x)$.

2) גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh(\tanh(x))$.

3) גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$.

4) גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh^2(x^3)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x}$

2) $f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)}$

3) $f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x)$

4) $f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3)$

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

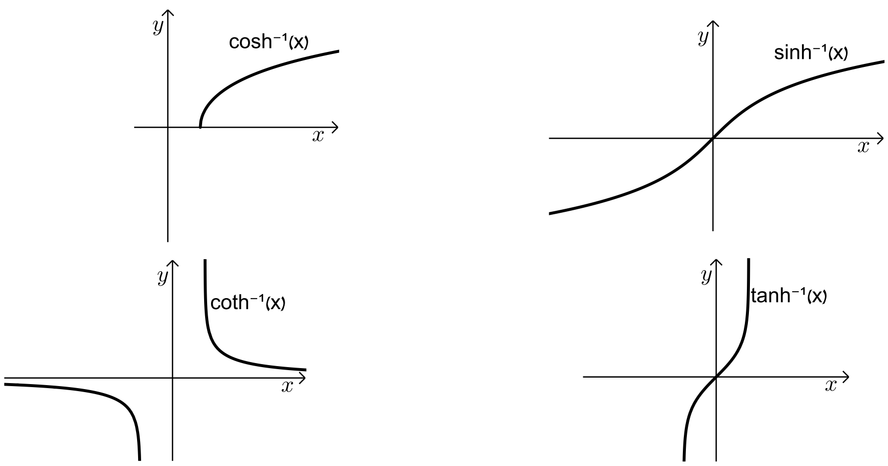
סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות הן:

$$\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\coth^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \cosh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

תיאורים גרפיים



הערה

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם arc, למשל $\sinh^{-1}(x)=\operatorname{arcsinh}(x)$.

שאלות

1) הוכח כי $\sinh(\operatorname{arc}\cosh(x))=\sqrt{x^2-1}$, לכל $|x|>1$.

2) הוכח כי $\cosh(\operatorname{arc}\tanh(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, לכל $|x|<1$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$\left(\tanh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert<1$	$\left(\sinh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\left(\coth^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert>1$	$\left(\cosh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ x>1$

שאלות

1) גזור את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\operatorname{arcsinh}(x)\right)$.

2) גזור את הפונקציה $f(x)=\ln\left(\cosh\left(\operatorname{arctanh}(x)\right)\right)$.

3) גזור את הפונקציה $f(x)=\operatorname{arcsinh}\left(\operatorname{arccosh}\left(\tan(x)\right)\right)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$

2) $f'(x)=\frac{x}{1-x^2}$

3) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\cosh^{-1}(\tan x)\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$