

חדוא 1

פרק 34 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. זהויות עם פונקציות היפרבוליות.....1
2. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות.....2
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות.....4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות.....5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות.....6

זהויות עם פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

סינוס וקוסינוס היפרבוליים	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	ארגומנט שלילי
$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$	$1 + \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\sinh^2(x) + 1 = 2\cosh^2(x) - 1$$

שאלות

(1) הוכח את הזהות $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.

(2) הוכח את הזהות הכפולה $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$

בתחום $x \geq 0$.

(3) הוכח את הזהות $\cosh^4(x) - \sinh^4(x) = \cosh(2x)$.

(4) הוכח את הזהויות $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

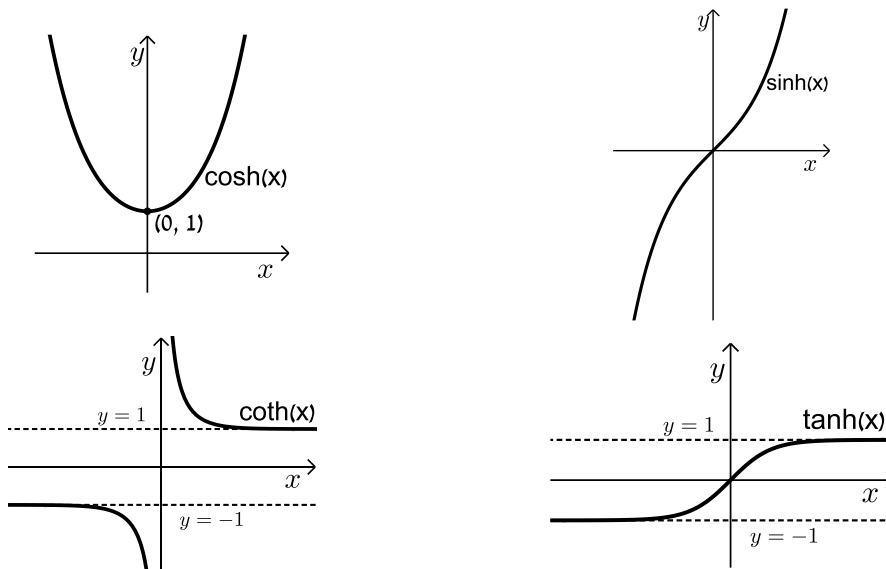
סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות הן:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים



שאלות

(1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x = 1$.

(2) נתון כי $\sinh(x_0) = -1$.

חשב את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו- $\coth(x_0)$.

(3) חשב: $\sinh(\ln 5)$.

(4) חשב: $\tanh(-3 \ln 2)$.

תשובות סופיות

(1) 1.175

$$\cosh(x_0) = \sqrt{2}, \quad \tanh(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \coth(x_0) = -\sqrt{2} \quad (2)$$

(3) 2.4

(4) $-\frac{63}{65}$

נגזרות של פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

שאלות

1 גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln x)$.

2 גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh(\tanh(x))$.

3 גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$.

4 גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh^2(x^3)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)} \quad (2)$$

$$f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x) \quad (3)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3) \quad (4)$$

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות הן:

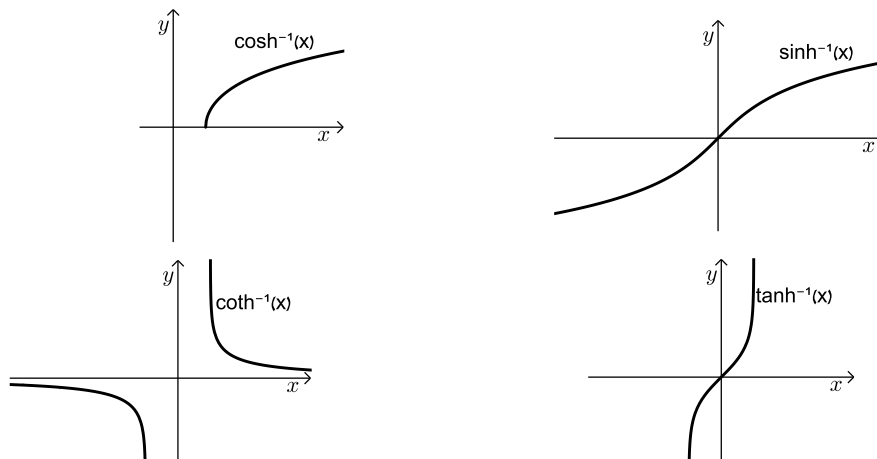
$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים



הערה

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם arc , למשל $\sinh^{-1}(x) = \text{arcsinh}(x)$.

שאלות

(1) הוכח כי $\sinh(\text{arc cosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, לכל $|x| > 1$.

(2) הוכח כי $\cosh(\text{arc tanh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, לכל $|x| < 1$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x < 1$
$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$	$(\coth^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x > 1$

שאלות

- 1 גזור את הפונקציה $f(x) = \ln(\operatorname{arcsinh}(x))$.
- 2 גזור את הפונקציה $f(x) = \ln(\cosh(\operatorname{arctanh}(x)))$.
- 3 גזור את הפונקציה $f(x) = \operatorname{arcsinh}(\operatorname{arcosh}(\tan(x)))$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\cosh^{-1}(\tan x))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3)$$