

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 36 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות..... 1
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות..... 3
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות..... 4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות..... 5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות..... 6

## הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

### סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות הן:

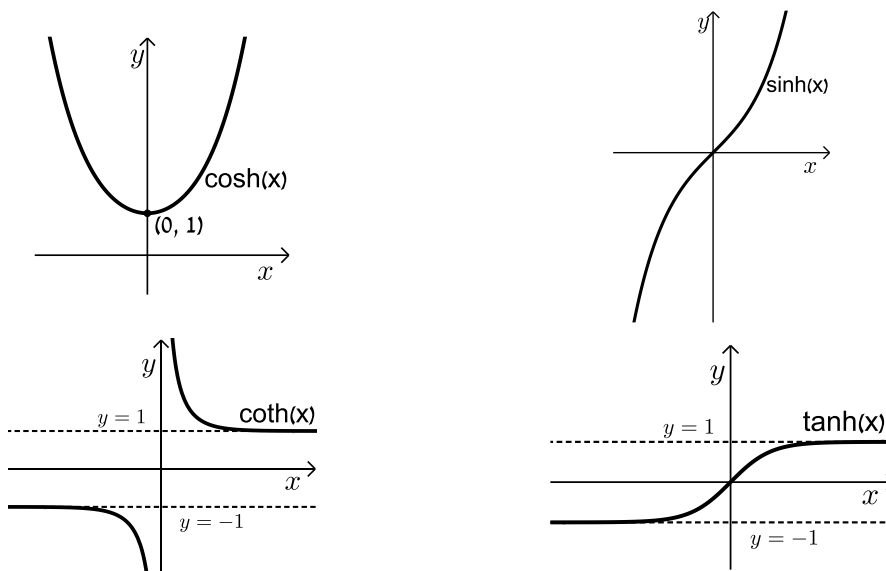
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

### תיאורים גרפיים



### שאלות

(1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית  $\sinh(x)$ , עבור  $x=1$ .

(2) נתון כי  $\sinh(x_0) = -1$ .

חשב את ערכן של הפונקציות  $\cosh(x_0)$ ,  $\tanh(x_0)$  ו- $\coth(x_0)$ .

(3) חשב:  $\sinh(\ln 5)$ .

(4) חשב:  $\tanh(-3 \ln 2)$ .

**תשובות סופיות**

1.175 (1)

$$\cosh(x_0) = \sqrt{2}, \quad \tanh(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \coth(x_0) = -\sqrt{2} \quad (2)$$

2.4 (3)

 $-\frac{63}{65}$  (4)

## זהויות עם פונקציות היפרבוליות

### סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

סינוס וקוסינוס היפרבוליים	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	ארגומנט שלילי
$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$	$1 + \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

### סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

### זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\sinh^2(x) + 1 = 2\cosh^2(x) - 1$$

### שאלות

(1) הוכח את הזהות  $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ .

(2) הוכח את הזהות הכפולה  $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$

בתחום  $x \geq 0$ .

(3) הוכח את הזהות  $\cosh^4(x) - \sinh^4(x) = \cosh(2x)$ .

(4) הוכח את הזהויות  $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נגזרות של פונקציות היפרבוליות

---

### סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

### שאלות

(1) גזור את הפונקציה  $f(x) = \cosh(\ln x)$ .

(2) גזור את הפונקציה  $f(x) = \sinh(\tanh(x))$ .

(3) גזור את הפונקציה  $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$ .

(4) גזור את הפונקציה  $f(x) = \sinh^2(x^3)$ .

### תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)} \quad (2)$$

$$f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x) \quad (3)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3) \quad (4)$$

## הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

### סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות הן:

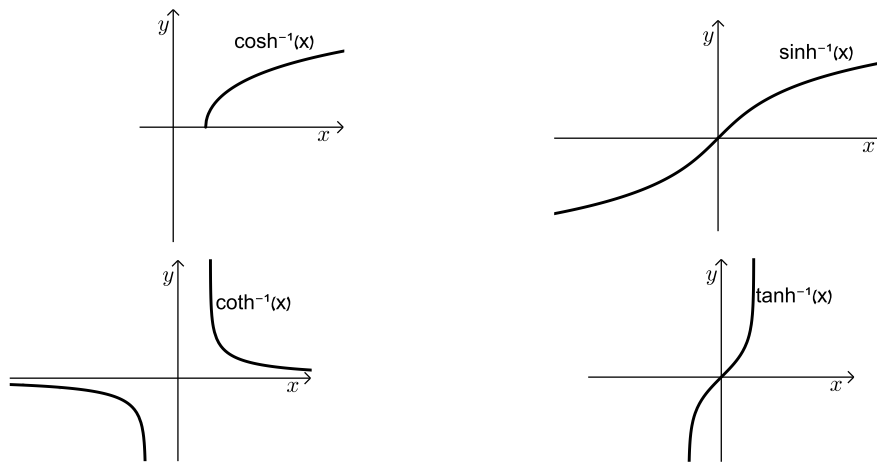
$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

### תיאורים גרפיים



### הערה

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם  $\text{arc}$ , למשל  $\sinh^{-1}(x) = \text{arcsinh}(x)$ .

### שאלות

(1) הוכח כי  $\sinh(\text{arc cosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ , לכל  $|x| > 1$ .

(2) הוכח כי  $\cosh(\text{arc tanh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , לכל  $|x| < 1$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

---

### סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \quad  x  < 1$
$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$	$(\coth^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \quad  x  > 1$

### שאלות

- (1) גזור את הפונקציה  $f(x) = \ln(\operatorname{arc} \sinh(x))$ .
- (2) גזור את הפונקציה  $f(x) = \ln(\cosh(\operatorname{arc} \tanh(x)))$ .
- (3) גזור את הפונקציה  $f(x) = \operatorname{arc} \sinh(\operatorname{arc} \cosh(\tan(x)))$ .

### תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\cosh^{-1}(\tan x))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3)$$