

חשבון דיפרנציאלי

פרק 25 - נושאים מתקדמים - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות..... 1
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות..... 3
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות..... 4
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות..... 5
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות..... 6

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות

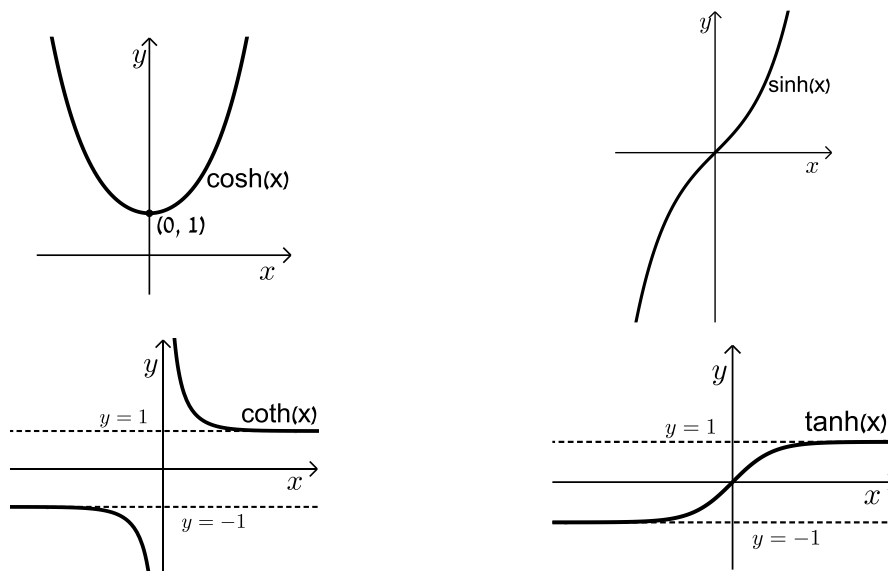
סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות הן:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים



שאלות

(1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית $\sinh(x)$, עבור $x=1$.

(2) נתון כי $\sinh(x_0) = -1$.

חשב את ערכן של הפונקציות $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$ ו- $\coth(x_0)$.

(3) חשב: $\sinh(\ln 5)$.

(4) חשב: $\tanh(-3 \ln 2)$.

תשובות סופיות

1.175 (1)

$$\cosh(x_0) = \sqrt{2}, \quad \tanh(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \coth(x_0) = -\sqrt{2} \quad (2)$$

2.4 (3)

 $-\frac{63}{65}$ (4)

זהויות עם פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות

סינוס וקוסינוס היפרבוליים	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	ארגומנט שלילי
$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$	$1 + \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\sinh^2(x) + 1 = 2\cosh^2(x) - 1$$

שאלות

(1) הוכח את הזהות $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.

(2) הוכח את הזהות הכפולה $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$

בתחום $x \geq 0$.

(3) הוכח את הזהות $\cosh^4(x) - \sinh^4(x) = \cosh(2x)$.

(4) הוכח את הזהויות $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות של פונקציות היפרבוליות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

שאלות

(1) גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln x)$.

(2) גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh(\tanh(x))$.

(3) גזור את הפונקציה $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$.

(4) גזור את הפונקציה $f(x) = \sinh^2(x^3)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)} \quad (2)$$

$$f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x) \quad (3)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3) \quad (4)$$

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות

סיכום כללי

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות הן:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים



הערה

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם arc , למשל $\sinh^{-1}(x) = \text{arcsinh}(x)$.

שאלות

(1) הוכח כי $\sinh(\text{arc cosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, לכל $|x| > 1$.

(2) הוכח כי $\cosh(\text{arc tanh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, לכל $|x| < 1$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות

סיכום כללי

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x < 1$
$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$	$(\coth^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x > 1$

שאלות

1. גזור את הפונקציה $f(x) = \ln(\operatorname{arc} \sinh(x))$.
2. גזור את הפונקציה $f(x) = \ln(\cosh(\operatorname{arc} \tanh(x)))$.
3. גזור את הפונקציה $f(x) = \operatorname{arc} \sinh(\operatorname{arc} \cosh(\tan(x)))$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\cosh^{-1}(\tan x))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3)$$