

# מתמטיקה א

פרק 22 - סדרות נוספות

תוכן העניינים

1. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס ..... 1

## תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

### שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש-  $(a_n)$  סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.  
א. הוכח שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\text{ב. הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

- (4) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

$$\text{(5) חשב את הגבול הבא } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

$$(6) \quad \text{הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: } a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$$

$$(7) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי: } a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

$$(8) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי: } a_1 = 0 (n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכח שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.  
 ב. מצא סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

$$(10) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(11) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(12) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(13) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(14) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$$

מצא את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(15) \quad \text{נתונה סדרה } a_n. \text{ נגדיר סדרה חדשה } b_n \text{ על ידי } b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$$

הוכח כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי  $a_n$  סדרה. נניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים של הסדרה הנתונה.

הוכח שלכל  $N \in \mathbb{N}$  קיימים  $m, n \in \mathbb{N}$ , כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$ .

17) נתונה סדרה  $a_n$ .

1.  $a_{n_k}$  ו- $a_{m_k}$  שתי תת-סדרות של  $a_n$  המקיימות:

$$a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L.$$

2. כל איברי הסדרה  $a_n$  מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכח:  $a_n \rightarrow L$ .

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכח כי הסדרה מתכנסת.

19) פתור את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל סדרה חסומה  $a_n$ ,  $\inf a_n \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq \sup a_n$ ,

הערה:  $\sup a_n$  הוא החסם העליון של הקבוצה  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

ב. מצא סדרה  $a_n$  שעבורה  $\inf a_n < \underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n < \sup a_n$ .

20) הוכח שהסדרה  $a_n$  מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם  $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ .

21) הוכח את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות  $a_n, b_n$  מתקיים:

$$א. \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$$

$$ב. \underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות  $a_n$  ו- $b_n$ .

קבע האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכח את קביעתך.

א. ייתכן שמתקיים  $\overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ .

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23 יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

24 תהי  $(a_n)$  סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$ .

א. הוכיחו שאם  $(a_n)$  מתכנסת, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

ב. הוכיחו שאם  $L > 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ ,

אז גם  $\frac{1}{L}$  הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

25 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות,  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  שתי סדרות, המקיימות  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ .

הוכיחו שאם לכל  $n$  מתקיים  $0 \leq a_n, b_n \leq 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .

26 תהי  $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ .

א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה.

ב. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיים  $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$ .

ד. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$ .

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ו. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

(27) תהי  $(a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil)$ .

- א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה מלרע.  
 ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .  
 ג. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.  
 ד. יהי  $\ell$  מספר טבעי.  
 הוכיחו שכמעט לכל  $n$ , מתקיים  $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$ .  
 ה. יהי  $\ell$  מספר טבעי.  
 הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$ .  
 ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .  
 ז. האם  $(a_n)$  חסומה מלעיל?  
 ח. חשבו את  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 ט. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , וקבעו האם לקבוצה  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מקסימום.

## תשובות סופיות

- (1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.  
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $\pm \frac{1}{e}$ .  
 (2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $-1, 0$ .  
 ב. הגבול של הסדרה הוא  $0$ .  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $0, 0.25, 0.5, 0.75$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)