חשבון אינפיניטסימלי

פרק 2 - סדרות

תוכן העניינים

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

1) $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^3+10n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

21) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

22) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **22** : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

<u>הערה חשובה מאוד !</u>
בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

1) 0	2) 4
3) ∞	4) 0
5) -5	6) 1
7) 1.5	8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25	10) 4
11) 2	12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$	

14) $\left(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}\right) \Leftarrow (b \neq 0)$, $\left(\lim a_n = \infty\right) \Leftarrow (a>0,\ b=0)$, $\left(\lim a_n = -\infty\right) \Leftarrow (a<0,\ b=0)$

15) 2.5	16) $\frac{k}{2}$
17) 0.5	18) 0.5
19) $\frac{a-b}{2}$	20) 0.5
21) $\frac{1}{3}$	22) 1

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{n}$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) 1

3) e^{2}

4) e^{-1}

5) e^{3}

6) e^{-12}

7) e^{30}

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשב את הגבולות בשאלות **1-5**:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **4**: הוכח כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

6) הוכח שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0:

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$.

ב. $a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$.

7) יהי x מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>2$.

8) חשב את הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

תשובות סופיות

1) 4
2) 0
3) 1
4) 0
5) 1
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) 9

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) ∞

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

1) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,,\ a_1=\sqrt{2}$

2) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1}\,,\ a_1=2$

3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

4) יהיו $a>0,\ \ x_1>0$.
נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל n.
הוכח שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

5) יהי $x_1=a\geq 0$.
נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי: $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל n.
א. מצא את כל הערכים של הקבוע a, עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבע האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

6) יהיו $0<b_1<a_1$.
נגדיר: $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\,,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, לכל n.
הוכח שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

7) נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי : $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

<u>הנח</u> שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשב אותו.

הערה : בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכח שהגבול $\lim_{n\to\infty} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשב אותו.

ב.3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף ב.1. הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

1) הגבול 2.

2) הגבול 1.

3) הגבול 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

5) א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.
ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכח כי :

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

5) $\lim_{n\to\infty}2n+4=\infty$

6) $\lim_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

7) $\lim_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

8) $\lim_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

9) $\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

10) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il