חדוא 1 מ

פרק 5 - סדרות

תוכן העניינים

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{3n}+(-3)^n+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^n+2}{(-3)^{2n}+(-3)^n+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$

2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4}-\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)$

3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכח שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

4) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

5) חשב את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right]^n$.

6) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2;\ a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

7) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי: $a_1=2;\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

8) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי: $(n\in\mathbb{N})\ a_1=0;\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

9) א. הוכח שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצא סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

10) נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

11) נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

12) נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

13) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.
מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

14) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n!]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצא את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

15) נתונה סדרה a_n. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכח כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה. נניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים של הסדרה הנתונה.
הוכח שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m,n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n.
a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:
1. $a_{n_k} \to L$, $a_{m_k} \to L$
2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכח: $a_n \to L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **4-5**.

18) נתונה סדרה חיובית a_n המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$.
הוכח כי הסדרה מתכנסת.

19) פתור את שני הסעיפים הבאים:
א. הוכח שלכל סדרה חסומה a_n, $\inf a_n \le \underline{\lim} a_n \le \overline{\lim} a_n \le \sup a_n$
הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
ב. מצא סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n < \sup a_n$.

20) הוכח שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

21) הוכח את המשפט המפורסם הבא:
לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים:
א. $\overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$
ב. $\underline{\lim}(a_n + b_n) \ge \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n.
קבע האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכח את קביעתך.
א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.
ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.
ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.
הוכיחו כי $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n)$.

24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.
א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של (a_n),
אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.
ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).
ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,
ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

25) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n),
המקיימות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.
ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.
הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

26) תהי $a_n = \langle\sqrt{n}\rangle = \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right]$.
א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.
ב. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.
ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\left\langle\sqrt{n^2-1}\right\rangle = \sqrt{n^2-1} - n + 1$.
ד. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.
ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של (a_n).
ו. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$
יש מקסימום.

27) תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל-$\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו שכמעט לכל n, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

1) חשב: $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2) חשב: $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n\cdot(2n+1)}{n^3}$.

3) חשב: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, כאשר p קבע שלם וחיובי.

4) חשב: $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot c_1+2\cdot c_2+3\cdot c_3+\ldots+n\cdot c_n}{n^3}$, אם ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=k$.

5) חשב: $\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1^2\cdot a\right]+\left[2^2\cdot a\right]+\ldots+\left[n^2\cdot a\right]}{n^3}$, כאשר a קבוע ממשי.

6) נתון כי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכח כי:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הנח כי $L\neq 0$. בסעיף ג' הנח כי $a_n>0$ לכל n.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{p+1}$

4) $\frac{k}{3}$

5) $\frac{a}{3}$

6) שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

2) הוכח שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

3) הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n, כאשר $0 < a < 1$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.

5) הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

6) סדרה x_n מקיימת: $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le k|x_{n+1} - x_n|$ לכל n, כאשר $0 < k < 1$.
הוכח שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$.
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכח שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ $\qquad x_1 = 1,$

ב. $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2}$ $\qquad x_1 = 1,$

ג. $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$ $\qquad x_1 = 1,$

9) נגדיר סדרה x_n על ידי: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

10) סדרה x_n מקיימת: $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$, לכל n טבעי, ו- $1\le x_1\le x_2\le 2$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.
הדרכה: הוכח ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$.

11) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. נתונה סדרה x_n.
אם $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, אז x_n מתכנסת.
ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2}-x_{n+1}|<|x_{n+1}-x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.
ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל n טבעי:
$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\alpha\cdot|x_{n+1}-x_n|$

הערה
בשאלות **7-10** מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחת בשאלה **6**.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il