

חדוא 1 מ

פרק 5 - סדרות

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)
2. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס 1
3. משפט שטולץ 6
4. מבחן קושי להתכנסות סדרות 8

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.
א. הוכח שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\text{ב. הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

- (4) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

$$\text{(5) חשב את הגבול הבא } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

$$(6) \text{ הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: } a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$$

$$(7) \text{ נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי: } a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

$$(8) \text{ נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי: } a_1 = 0 (n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכח שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצא סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

$$(10) \text{ נתונה סדרה } a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(11) \text{ נתונה סדרה } a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(12) \text{ נתונה סדרה } a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(13) \text{ נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(14) \text{ נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$$

מצא את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

- (15) נתונה סדרה a_n . נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$. הוכח כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי a_n סדרה. נניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים של הסדרה הנתונה.

הוכח שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m, n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n .

1. a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

$$a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L.$$

2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכח: $a_n \rightarrow L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכח כי הסדרה מתכנסת.

19) פתור את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל סדרה חסומה a_n , $\inf a_n \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq \sup a_n$, הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

ב. מצא סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \underline{\lim} a_n < \overline{\lim} a_n < \sup a_n$.

20) הוכח שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

21) הוכח את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים:

$$א. \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$$

$$ב. \underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n .

קבע האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכח את קביעתך.

א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23 יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

24 תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

ב. הוכיחו שאם $L > 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) ,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

25 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$.

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

26 תהי $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ו. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

$$(27) \text{ תהי } (a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil).$$

- א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.
 ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n) .
 ג. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.
 ד. יהי ℓ מספר טבעי.
 הוכיחו שכמעט לכל n , מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$.
 ה. יהי ℓ מספר טבעי.
 הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$.
 ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n) .
 ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?
 ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 ט. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

- (1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm \frac{1}{e}$.
 (2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $-1, 0$.
 ב. הגבול של הסדרה הוא 0 .
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

$$(1) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבוע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכח כי:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הנח כי $L \neq 0$. בסעיף ג' הנח כי $a_n > 0$ לכל n .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{p+1}$

(4) $\frac{k}{3}$

(5) $\frac{a}{3}$

(6) שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

- (1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n .
הוכח שהסדרה מתכנסת.
- (2) הוכח שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.
- (3) הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.
- (4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n , כאשר $0 < a < 1$.
הוכח שהסדרה מתכנסת.
- (5) הוכח כי הסדרה $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.
- (6) סדרה x_n מקיימת: $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$, לכל n , כאשר $0 < k < 1$.
הוכח שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.
- (7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$.
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.
- (8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכח שהסדרה x_n מתכנסת.
- א. $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$
- ב. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$
- ג. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$

$$(9) \quad \text{נגדיר סדרה } x_n \text{ על ידי: } x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$(10) \quad \text{סדרה } x_n \text{ מקיימת: } x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}, \text{ לכל } n \text{ טבעי, ו- } 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

$$\text{הדרכה: הוכח ראשית שלכל } n \text{ טבעי מתקיים } \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$$

(11) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n .

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0 < \alpha < 1$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחת בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il