

# מתמטיקה מורחב

פרק 19 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר) 1
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות ..... 1
3. חישוב גבול לפי אוילר ..... 3
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ' ..... 4
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש ..... 6
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית ..... 7
7. חישוב גבול לפי ההגדרה ..... 9
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה ..... 11
9. הגדרת הגבול לפי היינה ..... 14
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס ..... 15
11. משפט שטולץ ..... 20
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות ..... 22
13. שאלות הוכח או הפרך ..... 24

## חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

## שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left( \frac{4}{n} \right) \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (23)$$

$$\cdot \text{רמז לשאלה 24: } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**הערה חשובה מאוד !**

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה  $n$  – המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

## תשובות סופיות

- |   |                        |
|---|------------------------|
| 4 (2)   | 0 (1)                  |
| 0 (4)   | $\infty$ (3)           |
| 1 (6)   | -5 (5)                 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8)   | 1.5 (7)                |
| 4 (10)  | 0.25 (9)               |
| $\ln 3$ (12)  | 2 (11)                 |
|   | $e^{\frac{1}{3}}$ (13) |
| $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$ , $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ (14) |                        |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$   |                        |
| $\frac{k}{2}$ (16)  | 2.5 (15)               |
| 0.5 (18)  | 0.5 (17)               |
| 4 (20)  | $\frac{a-b}{2}$ (19)   |
| $\frac{1}{3}$ (22)  | 0.5 (21)               |
| 1 (24)  | $\infty$ (23)          |

## חישוב גבול לפי אוילר

## שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e \quad (8)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

## חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

רמז לשאלה 9: הוכח כי  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

11) הוכח שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

12) יהי  $x$  מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה:  $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$

$$13) חשב את הגבול:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$$

$$14) חשב את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$$

15) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית, המקיימת  $1 < q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

### תשובות סופיות

- (1) 4  
 (2) 0  
 (3) 0  
 (4) 0.75  
 (5) 3  
 (6)  $\frac{3}{4}$   
 (7) 0  
 (8) 16  
 (9) 0  
 (10) 1  
 (11) שאלת הוכחה.  
 (12) שאלת הוכחה.  
 (13) 9  
 (14) 1  
 (15) שאלת הוכחה.

## חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

### שאלות

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

## חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

### שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , לכל  $n$ .  
הוכח שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$ .

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6)$ , לכל  $n$ .

- א. מצא את כל הערכים של הקבוע  $a$ , עבורם הסדרה עולה/יורדת.  
ב. קבע האם הסדרה  $x_n$  מתכנסת עבור  $3 < a < 3.5$ .

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

נגדיר:  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ , לכל  $n$ .

הוכח שהסדרות  $a_n$  ו- $b_n$  מתכנסות ומתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

$$(7) \quad a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

א.1. נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הנח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים וחשב אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.

ב.1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$  קיים, וחשב אותו.

ב.3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף ב.1. הוא אכן נכון.

### תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא  $\sqrt{a}$ .

(5) א. אם  $2 \leq a \leq 3$  הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

## חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

בשאלות 1-7 הוכח על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה  $(a_n)$  מתכנסת.  
הוכח שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ .

הוכח, לפי ההגדרה, כי :

$$\text{א. } (a_n + b_n) \rightarrow a + b$$

$$\text{ב. } (a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b$$

בשאלות 10-14 הוכח על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכח שהסדרה  $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$  שואפת לאינסוף.

(16) הוכח שהסדרה  $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$  שואפת לאינסוף.

17) הוכח שהסדרה  $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$  לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

18) הוכח או הפרך :

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שלילת הגדרת הגבול של סדרה

### שאלות

(1) מצא את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתוב את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א.  $1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$

ב.  $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$

ג.  $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

(2) מצא את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתוב את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

ב.  $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

ג.  $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1}$

בשאלות 3-6 הוכח לפי ההגדרה כי:

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4}$

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1$

(7) בסעיפים א-ב הוכח לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה  $a_n = (-1)^n$  לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה  $a_n = (-1)^n$ .

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכח שלסדרה  $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$  לא קיים גבול.

8 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$  מתבדרת.

9 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$  מתבדרת.

10 הוכח, לפי ההגדרה, שלסדרה  $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$  לא קיים גבול.

11 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{n}{2} - \left[ \frac{n}{2} \right]$  מתבדרת.

12 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{n}{10} - \left[ \frac{n}{10} \right]$  מתבדרת.

13 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$  מתבדרת.

14 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$  מתבדרת.

15 הוכח, לפי ההגדרה, שלסדרה  $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$  אין גבול.

16 הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$  מתבדרת.

הדרכה: הוכח קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$1. \quad \sqrt{m^2} - [\sqrt{m^2}] = 0 \text{ לכל } m \text{ טבעי.}$$

$$2. \quad \sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$3. \quad [\sqrt{m^2 - 1}] = m - 1 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$4. \quad \sqrt{m^2 - 1} - [\sqrt{m^2 - 1}] \geq \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

(17) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$  לא שואפת ל- $\infty$ .

(18) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$  לא שואפת ל- $\infty$ .

(19) נתונה הסדרה  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$ .

הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל- $\infty$ .

ב. לא שואפת ל- $-\infty$ .

(20) הוכח, לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \lceil n\sqrt{10} \rceil$  לא שואפת ל- $\infty$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הגדרת הגבול לפי היינה

### שאלות

הוכח כי הגבולות הבאים אינם קיימים לפי היינה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x-4|} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

### שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש-  $(a_n)$  סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.  
א. הוכח שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\text{ב. הוכח כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

- (4) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

$$\text{(5) חשב את הגבול הבא } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

$$(6) \text{ הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול: } a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$$

$$(7) \text{ נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי: } a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

$$(8) \text{ נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי: } a_1 = 0 (n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכח שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.  
 ב. מצא סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

$$(10) \text{ נתונה סדרה } a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(11) \text{ נתונה סדרה } a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(12) \text{ נתונה סדרה } a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(13) \text{ נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$(14) \text{ נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$$

מצא את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

- (15) נתונה סדרה  $a_n$ . נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$ . הוכח כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי  $a_n$  סדרה. נניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים של הסדרה הנתונה.

הוכח שלכל  $N \in \mathbb{N}$  קיימים  $m, n \in \mathbb{N}$ , כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$ .

17) נתונה סדרה  $a_n$ .

1.  $a_{n_k}$  ו- $a_{m_k}$  שתי תת-סדרות של  $a_n$  המקיימות:

$$a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L.$$

2. כל איברי הסדרה  $a_n$  מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכח:  $a_n \rightarrow L$ .

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכח כי הסדרה מתכנסת.

19) פתור את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל סדרה חסומה  $a_n$ ,  $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$ , הערה:  $\sup a_n$  הוא החסם העליון של הקבוצה  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

ב. מצא סדרה  $a_n$  שעבורה  $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$ .

20) הוכח שהסדרה  $a_n$  מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם  $\liminf a_n = \limsup a_n$ .

21) הוכח את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות  $a_n, b_n$  מתקיים:

$$א. \lim(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

$$ב. \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות  $a_n$  ו- $b_n$ .

קבע האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכח את קביעתך.

א. ייתכן שמתקיים  $\lim(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$ .

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23 יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

24 תהי  $(a_n)$  סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$ .

א. הוכיחו שאם  $(a_n)$  מתכנסת, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

ב. הוכיחו שאם  $L > 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ ,

אז גם  $\frac{1}{L}$  הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

25 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות,  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  שתי סדרות, המקיימות  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ .

הוכיחו שאם לכל  $n$  מתקיים  $0 \leq a_n, b_n \leq 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .

26 תהי  $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה.

ב. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיים  $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$ .

ד. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$ .

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ו. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

$$(27) \text{ תהי } (a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil).$$

- א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה מלרע.  
 ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .  
 ג. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.  
 ד. יהי  $\ell$  מספר טבעי.  
 הוכיחו שכמעט לכל  $n$ , מתקיים  $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$ .  
 ה. יהי  $\ell$  מספר טבעי.  
 הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$ .  
 ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .  
 ז. האם  $(a_n)$  חסומה מלעיל?  
 ח. חשבו את  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 ט. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , וקבעו האם לקבוצה  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מקסימום.

## תשובות סופיות

- 1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.  
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $\pm \frac{1}{e}$ .  
 2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $-1, 0$ .  
 ב. הגבול של הסדרה הוא 0.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $0, 0.25, 0.5, 0.75$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט שטולץ

### שאלות

$$(1) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבוע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשב: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכח כי:

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$  (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- $L$ ).

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$  (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- $L$ ).

ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$  (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- $L$ ).

\* הערה: בסעיף ב' הנח כי  $L \neq 0$ . בסעיף ג' הנח כי  $a_n > 0$  לכל  $n$ .

**תשובות סופיות**

**(1)** 1

**(2)**  $\frac{2}{3}$

**(3)**  $\frac{1}{p+1}$

**(4)**  $\frac{k}{3}$

**(5)**  $\frac{a}{3}$

**(6)** שאלת הוכחה.

## מבחן קושי להתכנסות סדרות

### שאלות

- (1) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ , לכל  $n$ .  
הוכח שהסדרה מתכנסת.
- (2) הוכח שהסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  שואפת לאינסוף.
- (3) הוכח כי הסדרה  $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  מתכנסת.
- (4) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < a^n$ , לכל  $n$ , כאשר  $0 < a < 1$ .  
הוכח שהסדרה מתכנסת.
- (5) הוכח כי הסדרה  $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$  מתכנסת.
- (6) סדרה  $x_n$  מקיימת:  $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$ , לכל  $n$ , כאשר  $0 < k < 1$ .  
הוכח שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.
- (7) נתונה סדרה  $x_n$  המוגדרת על ידי  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ .  
הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.
- (8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכח שהסדרה  $x_n$  מתכנסת.
- א.  $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$
- ב.  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$
- ג.  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$

$$(9) \quad \text{נגדיר סדרה } x_n \text{ על ידי: } x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$$

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$(10) \quad \text{סדרה } x_n \text{ מקיימת: } x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}, \text{ לכל } n \text{ טבעי, ו- } 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$$

הוכח שהסדרה מתכנסת.

$$\text{הדרכה: הוכח ראשית שלכל } n \text{ טבעי מתקיים } \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$$

(11) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה  $x_n$ .

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ , אז  $x_n$  מתכנסת.

ב. אם לכל  $n$  מתקיים  $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$ , אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.

ג. אם סדרה  $x_n$  מקיימת את תנאי קושי, אז קיים  $0 < \alpha < 1$  כך שלכל  $n$  טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחת בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שאלות הוכח או הפרך

### הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים:

- א. קיים  $N$  טבעי כך שלכל  $n > N$  מתקיימת הטענה  $X$ .
- ב. כמעט לכל  $n$  מתקיימת הטענה  $X$ .
- ג. לכל  $n$ , פרט למספר סופי של  $n$ -ים, מתקיימת הטענה  $X$ .

### שאלות

בשאלות 1-13 הוכח או הפרך את הטענה הנתונה:

- (1) אם  $a_n$  סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- (2) אם  $b_n$  סדרה לא חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .
- (3) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ .
- (4) אם  $d_n$  סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$  וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$  אין גבול.
- (6) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n / b_n)$  אין גבול.
- (7) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתבדרת.
- (8) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתכנסת.
- (9) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ .
- (10) אם  $a_n < b_n$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

(11) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  וגם  $b_n$  חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

(12) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  וגם  $a_n < 1$  לכל  $n$ , אז  $k < 1$ .

(13) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$ .

(14) הוכח או הפרך:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם  $a_n$  ו- $b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) סדרות חסומות, אז גם הסדרה  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  חסומה.

ג. אם  $a_n$  סדרה עולה, אז גם הסדרה  $b_n = (a_n)^2$  עולה.

ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$ , אז הסדרה  $a_n$  חסומה.

ה. אם  $a_n$  ו- $b_n$  סדרות חסומות, אז גם הסדרה  $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$  חסומה.

ו. אם  $a_n$  סדרה מתכנסת ו- $b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) סדרה חסומה, אז לסדרה  $(a_n b_n^2)$  יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם  $a_n$  סדרה מתכנסת, אז קיים  $N$  טבעי, כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$\left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכח או הפרך את הטענה הנתונה:

(15) אם לכל  $n$  מתקיים:  $a_{n+1} < a_n^2$ ,  $a_n \in (0, 1)$  אז הסדרה  $a_n$  מתכנסת.

(16) הסדרה  $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n}{n}$  מתבדרת.

(17) אם לכל  $n$  מתקיים:  $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$ ,  $x_n \in (0, 1)$  אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$ .

(18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

19) הוכח או הפרך :

- א. אם הסדרה  $(x_n + \frac{1}{n}x_n)$  מתכנסת, אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.  
 ב. אם הסדרה  $(x_n^2 + \frac{1}{n}x_n)$  מתכנסת, אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.

20) סדרה של מספרים שלמים המקיימת  $x_{n+1} \neq x_n$  לכל  $n$ .  
 הוכח או הפרך :

- א. הסדרה  $x_n$  לא מקיימת את תנאי קושי.  
 ב. לסדרה  $x_n$  לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

21) הוכח או הפרך :

- א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  ו- $a < b$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n < b_n$ .  
 ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  וכמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \leq b_n$ , אז  $a \leq b$ .

22) תהי  $(a_n)$  סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכח או הפרך :

- א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n = 0$ .  
 ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \geq 0$ .  
 ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \neq 0$ .  
 ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n > 0$ .

23) הוכח או הפרך :

- א. אם  $(a_n)$  סדרה מתכנסת ואם  $a_n \leq k$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$ .  
 ב. אם  $(a_n)$  סדרה מתכנסת ואם  $a_n < k$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$ .

24) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית, המקיימת  $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$ , לכל  $n$ .

הוכח או הפרך :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

25) הוכח או הפרך :

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$

**(26)** נתונות שתי סדרות  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ , שעבורן:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$ .

הוכח או הפרך:

א.  $a_n \rightarrow 2$ ,  $b_n \rightarrow 0$  או  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 2$ .

ב.  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

**(27)** נניח שסדרה  $a_n$  מקיימת  $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $a_n$  עולה.

ב.  $a_n$  יורדת.

ג.  $a_n$  מתכנסת.

ד.  $a_n$  לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה תשובתך, אם נתון כי  $a_n$  מקיימת  $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$  לכל  $n$  טבעי?

**(28)** הסדרה  $(a_n)$  מקיימת את התכונה הבאה:

$$0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n) \text{ לכל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכח או הפרך:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

**(29)** א. תהי  $(a_n)$  סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

הוכח או הפרך:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. תהיינה  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$ .

הוכח או הפרך:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**(30)** נתונה הסדרה  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

הוכח או הפרך:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז: לכל  $x \geq 0$  מתקיים  $\ln(1+x) \leq x$ .

בשאלות 31-34 הוכח או הפרך את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$ .

31 אם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

32 אם כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים, אז גם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים.

33 א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

ב. קיים  $N > 0$ , כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $b_n \neq 0$ .

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

34 א. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $0 < b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

בשאלות 35-38 הוכח או הפרך את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$ .

35 א. אם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים, אז כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים.

ב. אם  $(a_n)$  חיובית, אז קיים  $N > 0$ , כך ש- $b_n > \frac{1}{2a_n}$  לכל  $n > N$ .

36 אם  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  חיוביות, אז  $(a_n)$  מתכנסת או  $(b_n)$  מתכנסת.

37 א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

ג. אם  $(a_n)$  חיובית ואפסה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

38 א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$ .

\* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$ .

בשאלות 39-42 הוכח או הפרך את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$ .

39 א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $a_n > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ג. אם קיימים אינסוף ערכי  $n$ , כך ש- $a_n > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ד. קיים  $N > 0$ , כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $b_n \neq 0$ .

40 א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $0 < b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

41 אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ , אז קיים  $N$  טבעי, כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $a_n < \frac{1}{3}$ .

42 א. אם כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ .

ב. אם קיים קבוע  $c > 0$ , כך ש- $b_n \geq c$  כמעט לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

43 הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 4$ .

ג. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$ .

ד. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$  לא קיים.

44) הוכח או הפרך את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ .

ג. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ .

ד. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  לא קיים.

45) הוכח או הפרך את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n - a_{n+1}| = \infty$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$ .

46) נתונה סדרה חיובית  $(a_n)$ .

הוכח או הפרך :

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ .

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ .

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא: כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית  $(a_n)$ , וידוע כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  קיים.

הוכח או הפרך :

א. הסדרה  $(na_n)$  אינה חסומה.

ב. הסדרה  $(a_{n+1} - a_n)$  חסומה.

ג. הסדרה  $\sqrt[n]{a_n}$  חסומה.

ד. הסדרה  $\frac{a_n}{n}$  מתכנסת.

ה.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$ .

**(48)** סדרה  $(a_n)$  תיקרא יורדת אם היא מקיימת  $a_{n+1} < a_n$  לכל  $n$ . הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $|a_{n+1}| < |a_n|$ , אז היא יורדת.
- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $a_{n+1} < a_n$ , אז היא יורדת.
- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $a_{n+1} < |a_n|$ , אז היא יורדת.

**(49)** תהי  $(a_n)$  סדרה, המקיימת  $a_{n+1} - a_n > -1$  ו-  $|a_n| > 2$ , לכל  $n$  טבעי. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים  $N$  טבעי, כך ש-  $a_N$  חיובי, אז  $a_n > 2$  לכל  $n \geq N$ .
- כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים או שכל איברי  $(a_n)$  שליליים.
- אם לכל  $n$  מתקיים בנוסף  $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$ , אז  $a_1 < -1$ .

**(50)** תהי  $(a_n)$  סדרה, כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים קבוע  $c > 0$ , כך שלכל  $n$  מתקיים  $|a_n| \geq c$ , אז מתקיים: כמעט כל איברי  $a_n$  חיוביים או כמעט כל איברי  $a_n$  שליליים.
- אם  $|a_n| > 0$  לכל  $n$ , אז מתקיים: כמעט כל איברי  $a_n$  חיוביים או כמעט כל איברי  $a_n$  שליליים.
- אם לכל  $n$  מתקיים  $|a_n| \geq n$ , אז  $(a_n)$  מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)