

מכניקה 90903

פרק 8 - עבודה ואנרגיה

תוכן העניינים

1. שימור אנרגיה ומשפט עבודה ואנרגיה 1
2. חישוב כוח משמר מאנרגיה פוטנציאלית 4
3. ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות 5
4. הספק 7
5. חישוב עבודה לכוח לא קבוע 9
6. תרגילים מסכמים 11
7. תרגילים מסכמים כולל תנועה מעגלית 15

שימור אנרגיה ומשפט עבודה ואנרגיה:

שאלות:

(1) אדם מושך ארגז

אדם מושך ארגז שמסתו $M = 5\text{kg}$ באמצעות חבל ובזווית 30° מעלות ביחס לקרקע. מקדם החיכוך הקינטי בין הארגז לקרקע הוא: $\mu_k = 0.2$. האדם מושך את הארגז לאורך שני מטרים. הכוח שמפעיל האדם הוא 80N .



- מהי העבודה שביצע האדם?
- מהי העבודה שביצע כוח החיכוך?
- מהן העבודות שביצעו כוח הכובד והנורמל מהמשטח?
- מהי העבודה הכוללת שנעשתה על הארגז?

(2) מהירות הארגז

בדוגמה הקודמת, אדם מושך ארגז, חשב את מהירות הארגז לאחר שהאדם משך אותו 2 מטרים אם ידוע שהוא התחיל ממנוחה.

(3) חישוב עבודה של כוח הכובד

אבן בעלת מסה 2kg נופלת מגג בניין בגובה 10 מטרים. חשבו את העבודה שביצע כוח הכובד על האבן עד הפגיעה בקרקע. חשבו פעם אחת באופן מפורש דרך המכפלה הסקלרית ופעם נוספת דרך האנרגיה הפוטנציאלית.

(4) עגלה במדרון



- עגלה נעה על משטח ללא חיכוך. העגלה מתחילה במעלה המדרון בגובה H עם מהירות התחלתית v_0 . מצא את מהירות העגלה בתחתית המדרון. נתונים: v_0 , H .

(5) קופסה במדרון עם חיכוך

קופסה יורדת במדרון משופע בעל זווית θ . הנח כי מהירות הקופסה במעלה המדרון היא v_0 וגובה ההתחלתי הוא H . מצא את מהירות העגלה בתחתית המדרון. הנח שהחיכוך הוא רק על החלק המשופע של התנועה. נתונים: H , θ , μ_k , v_0 .

(6) מסה נופלת על קפיץ

קפיץ חסר מסה, בעל קבוע קפיץ של $50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, מחובר לרצפה. משחררים ממנוחה מסה של $m = 2 \text{ kg}$ הנמצאת בגובה 3 מטר מעל הקפיץ. א. מצא את הכיוון המקסימאלי של הקפיץ. ב. מה הגובה המקסימאלי אליו תגיע המסה לאחר הפגיעה בקפיץ.

(7) שתי מסות מחוברות, מדרון וקפיץ

מסה m_1 נמצאת על מדרון משופע בזווית θ . המסה מונחת על קפיץ בעל קבוע קפיץ k המכווץ ב- $\Delta x = d$. אל המסה קשור חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית ומחובר למסה m_2 הנמצאת בגובה H מעל הרצפה. המערכת משוחררת ממנוחה. מצא את מהירות הפגיעה בקרקע של m_2 .

נתון:

$$m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$H = 3 \text{ m}, k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\theta = 30^\circ, d = 30 \text{ cm}$$

תשובות סופיות:

$$W_T = 135\text{J} \quad \text{ד} \quad W_N = W_g = 0 \quad \text{ג} \quad W_{fk} = -4\text{J} \quad \text{ב} \quad W = 139\text{J} \quad \text{א} \quad (1)$$

$$V_F \approx 7.35 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (2)$$

$$W_C = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cos \alpha = 200\text{J} \quad , \quad W_C = -\Delta U = -(U_F - U_i) = 200\text{J} \quad (3)$$

$$V_F = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \quad (4)$$

$$V_F = \sqrt{v_0^2 + 2gH(1 - \mu_k \cot(\theta))} \quad (5)$$

$$mgH = mgh \quad \text{ב} \quad \Delta x = 2\text{m} \quad \text{א} \quad (6)$$

$$V = 5.745 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (7)$$

חישוב כוח משמר מאנרגיה פוטנציאלית:

שאלות:

- (1) חישוב עבודה מתוך אנרגיה פוטנציאלית
על גוף מסוים פועל כוח משמר המתאים לאנרגיה הפוטנציאלית
הבאה: $U(x, y) = 2x^2 - 6y^3$.
מצא את העבודה אותה צריך לבצע על מנת להביא את הגוף מהנקודה (1,0)
אל הנקודה (2,3).

תשובות סופיות:

$$W_{\text{ext}} = 156\text{J} \quad (1)$$

ניתוח באמצעות גרפים של אנרגיות:

שאלות:

(1) נקודה הכי ימנית

גוף שמסתו 6 ק"ג נע לאורך ציר x בהשפעת כוח יחיד הנגזר מהאנרגיה הפוטנציאלית: $U(x) = 2x^4 - 36x^2$.

נתון שכאשר הגוף מגיע לנקודה בה $x = -1.5\text{m}$ מהירותו שווה ל- $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מהי הנקודה הימנית ביותר במסלול של הגוף?

ב. חזור על סעיף א', אם ערך המהירות היה: $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

(2) גמל דו דבשתי

כוח משמר פועל על כדור בעל מסה 625gr. הגרף הבא מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור כתלות במיקומו:



א. שרטטו באופן איכותי את הגרף של הכוח כתלות במיקום.

ב. תארו באופן מילולי את תנועת הכדור אם הוא משוחרר מ- $x = 7\text{m}$ ממנוחה.

ג. מהי המהירות המינימלית שצריך לתת לכדור במצב של סעיף ב' על מנת שהכדור יגיע לאינסוף?

ד. מהן נקודות שיווי המשקל?

מיינו אותן לפי יציבותן וציינו מה המשמעות של כל סוג של שיווי משקל.

(3) שני גופים בפוטנציאל אקספוננציאלי ריבועי

שני גופים נמצאים על ציר ה- x ונתונים להשפעת הפוטנציאל: $U(x) = Axe^{-Bx^2}$ כאשר A, B הם קבועים חיוביים. נתון כי ברגע מסוים גוף אחד נמצא ב- $x=0$ והאנרגיה שלו היא אפס, והגוף השני נמצא ב- $x = -\sqrt{\frac{1}{B}}$ והאנרגיה שלו היא: $E = -\frac{A}{e} \sqrt{\frac{1}{B}}$. (בחר את התשובה הנכונה):

א. בתחום $-\sqrt{\frac{1}{B}} \leq x \leq 0$.

ב. הגופים לא ייפגשו אף פעם.

ג. בנקודה $x = -\sqrt{\frac{1}{B}}$.

ד. ב- $x=0$.

תשובות סופיות:

(1) א. $x = -1.202\text{m}$ ב. $x = 6.81\text{m}$

(2) א.



ב. מתחיל בתאוצה בכיוון החיובי עד $x = 9\text{m}$ ואז מתחיל להאט עד $x = 11\text{m}$
 שם עוצר רגעית ומסתובב חזרה. כך חוזר עד אינסוף.

ג. 2 מטר לשנייה.

ד. $x = 6\text{m}$ לא יציבה, $x = 9\text{m}$ יציבה, $x = 12\text{m}$ לא יציבה.

(3) א'.

הספק:

שאלות:

1 דוגמה 1

- מכונית מתחילה לנסוע ממנוחה ומגיעה למהירות של 100 קמ"ש ב-10 שניות. מסת המכונית היא 1 טון. הניחו כי אין חיכוך עם האוויר.
- א. מהי העבודה שהתבצעה על המכונית?
- ב. מהו ההספק של המנוע בהנחה שהוא קבוע ומנוצל במלואו (הנחה לא נכונה)?

2 דוגמה 2

- אופנוע נוסע במהירות קבועה של 100 קמ"ש. כנגדו פועל כוח ההתנגדות מהאוויר של 300 ניוטון. מהו ההספק של המנוע, אם נניח שההספק מנוצל במלואו?

3 הספק ממוצע לשנות מהירות

- איזה כוח קבוע יש להפעיל על מכונית בעלת מסה של 2 טון, כדי לשנות את מהירותה מ- $9 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ ל- $27 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$ בתוך 4 sec?
- מהו ההספק הממוצע של כוח זה?

4 רכבת צעצוע חשמלית

- רכבת צעצוע חשמלית מורכבת מ-10 קרונות. הקרון הראשון והשני מכילים מנוע חשמלי ושוקלים 2 ק"ג כל אחד. שאר הקרונות עמוסים בצעצועים ושוקלים 3 ק"ג כל אחד. כל אחד מן המנועים מייצר הספק קבוע של 0.2KW.
- א. כמה זמן ייקח לרכבת להגיע למהירות של 10 מטר לשנייה אם התחילה לנוע ממנוחה?
- ב. מהי האנרגיה הקינטית של הקרון הראשון ומהי האנרגיה הקינטית של הקרון השני, כאשר הרכבת נעה במהירות שחישבת בסעיף א'?
- ג. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון הראשון לשני על הקרון השני בזמן ההאצה.
- ד. חשב את העבודה שביצע הכוח שפעל בחיבור בין הקרון השני לשלישי על הקרון השלישי בזמן ההאצה.

ה. הרכבת מגיעה לעלייה עם שיפוע של 2 מעלות, מה צריך להיות הספק המנועים (בהנחה שהם שווים) על מנת שהרכבת תישאר במהירות קבועה של 10 מטר לשנייה?



(5) הספק כאשר נתון המיקום כתלות בזמן

כוח יחיד פועל על גוף שמסתו 4kg, הכוח פועל בכיוון התנועה

והמיקום כתלות בזמן של הגוף הוא: $x(t) = 2 + 3t + t^2$ ביחידות m.k.s.

א. מהי העבודה שמבצע הכוח במשך 3 השניות הראשונות של התנועה?

ב. מהו ההספק של הכוח ב- $t = 2 \text{ sec}$?

תשובות סופיות:

$$\Delta E_k \approx 385,800 \text{ J} = W_{\sum \vec{F}} \quad \text{א. (1)}$$

$$p = 11.18 \text{ HP} \quad \text{(2)}$$

$$F = 2500 \text{ N}, \quad \bar{p} = 16.76 \text{ HP} \quad \text{(3)}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = 600 \text{ J} \quad \text{ג.} \quad E_{k_1=100 \text{ J}} = E_{k_2} \quad \text{ב.} \quad \Delta t = 3.5 \text{ sec} \quad \text{א. (4)}$$

$$p = 97.7 \text{ W} \quad \text{ה.} \quad W_{3 \rightarrow 2} = 1200 \text{ J} \quad \text{ד.}$$

$$p(t=2) = 56 \text{ W} \quad \text{ב.} \quad W = 144 \text{ J} \quad \text{א. (5)}$$

חישוב עבודה לכוח לא קבוע:

שאלות:

(1) חישוב עבודה במסלולים שונים

- חשב את העבודה שמבצע הכוח $\vec{F} = xx + yxy$ בין הנקודה $A(0,0)$ לנקודה $B(2,4)$:
- דרך המסלול של הקו הישר המחבר בין הנקודות.
 - דרך מסלול המקביל לציר ה- x עד לנקודה $C(2,0)$ ולאחר מכן דרך המסלול המקביל לציר ה- y עד לנקודה B .
 - דרך המסלול $y = x^2$.
 - דרך המסלול $x(t) = 2t, y(t) = 4t^2$.

(2) כוח בשלושה מימדים

- נתון הכוח: $\vec{F} = zx^2\hat{x} + xz\hat{y} + 2y\hat{z}$.
- חשב את העבודה של הכוח דרך המסלול היוצא מהנקודה $A(1,2,3)$ עד לנקודה $B(2,3,5)$ כאשר המסלול יוצא מ- A במקביל לציר ה- Y עד לנקודה $C(1,3,3)$ ולאחר מכן מ- C במקביל לציר ה- Z ועד לנקודה $D(1,3,5)$ ולאחר מכן מהנקודה D במקביל לציר ה- X עד לנקודה B .
 - חשב את העבודה של הכוח מהנקודה $A(0,0,-1)$ עד הנקודה $B(4,4,5)$ לאורך המסלול הנתון לפי המשוואות: $x(t) = 2t; y(t) = t^2; z(t) = 3t - 1$.

(3) חישוב עבודה של כוח במסלול מעגלי ואלפטי

- נתון הכוח הבא: $\vec{F} = a(2x+4y)x + b(4x-2y)y$
- מצא תנאי על a ו- b כך שהכוח יהיה משמר.
 - מצא את העבודה שעושה הכוח על גוף הנע במסלול סגור לאורך מעגל המתואר ע"י: $\vec{r} = R \cos \theta x + R \sin \theta y$ כאשר הגוף מתחיל את תנועתו מהנקודה $(R,0)$.
 - מצא את העבודה שעושה הכוח על גוף הנע במסלול סגור לאורך אליפסה המתוארת ע"י: $\vec{r} = d \cos \theta x + k \sin \theta y$ כאשר הגוף מתחיל את תנועתו מהנקודה $(d,0)$.

תשובות סופיות:

$$W_{A \rightarrow B} = 2 + \frac{64}{5} \text{ ג.} \quad W_{A \rightarrow B} = 18 \text{ ב.} \quad W_{A \rightarrow B} = \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 8}{3} \text{ א.} \quad (1)$$

$$W_{A \rightarrow B} = 2 + \frac{64}{5} \text{ ד.}$$

$$128\text{J} \text{ ב.} \quad 26.67\text{J} \text{ א.} \quad (2)$$

$$W = k \cdot d(0 - 4a\pi + 4b\pi) \text{ ג.} \quad W = R^2(0 - 4a\pi + 4b\pi) \text{ ב.} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow a = b \text{ א.} \quad (3)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

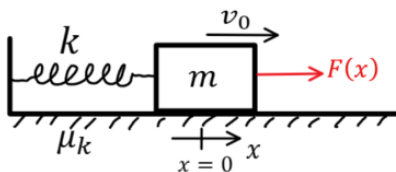
1) קפיץ יורה כדור

- הלוע של רובה צעצוע מורכב מקפיץ בעל קבוע k ובוכנה בעלת מסה m_1 . בטעינה דוחפים כדור בעל מסה m_2 ודורכים את הקפיץ. הכיוון של הקפיץ הוא d . ברגע הירי הקפיץ משוחרר ממנוחה.
- א. באיזה רגע הכדור מנתק מגע מהבוכנה?
 ב. מהי מהירות הכדור ברגע הזה?



2) כוח כפונקציה של מיקום, קפיץ וחיכוך*

- מסה m נמצאת על מישור אופקי לא חלק ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . החל מ- $t=0$ פועל על המסה כוח התלוי במיקום: $\vec{F}(x) = (30x^2 - 4x)\hat{x}$. כל היחידות בשאלה הן יחידות סטנדרטיות.
- ב- $t=0$ המסה נמצאת בראשית עם מהירות התחלתית v_0 והקפיץ רפוי.
- נתונים: $v_0 = 5 \frac{m}{sec}$, $\mu_k = 0.3$, $k = 10 \frac{N}{m}$, $m = 2kg$.
- א. רשמו ביטוי לתאוצת המסה כתלות במיקום $a(x)$, הנח כי התנועה תמיד בכיוון החיובי.
- ב. מצאו את המיקום בו התאוצה של המסה מתאפסת.
- ג. מהי העבודה שביצע הכוח מתחילת התנועה ועד אשר $x = 0.5m$?
- ד. מהי המהירות של המסה כאשר מיקומה $x = 0.5m$?



(3) כוח כפונקציה של זמן במישור משופע*

מסה $m = 5\text{kg}$ נמצאת על מישור משופע לא חלק.

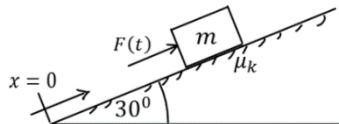
על המסה פועל כוח התלוי בזמן $F(t)$ שדוחף אותה במעלה המישור.

מהירות המסה ידועה והיא נתונה לפי הפונקציה: $v(t) = 3t^2 + 2t$.

מקדם החיכוך הוא: $\mu_k = 0.2$ ונתון כי: $x(t=0) = 0$.

כל היחידות הן יחידות סטנדרטיות.

זווית המישור היא 30° מעלות.



א. (1) היכן נמצא הגוף ב- $t = 2\text{sec}$?

(2) מהו גודל הכוח F ברגע זה?

ב. מהו מיקום הגוף כאשר תאוצתו היא: $8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$?

ג. מהי האנרגיה הקינטית של הגוף ברגע של סעיף ב'?

ד. מהי עבודת הכוח F מרגע $t = 0\text{sec}$ ועד ל- $t = 3\text{sec}$?

(4) קופסה מחליקה על מקטעים ישרים*

קופסה משוחררת ממנוחה ומתחילה להחליק לאורך מסלול שאינו ידוע,

אך מורכב מקטעים ישרים בלבד.

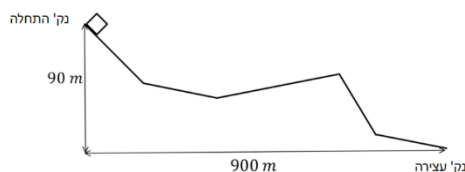
בין הקופסה למשטח עליו היא מחליקה קיים

חיכוך והקופסה נעצרת בנקודה

המרוחקת 900m אופקית ו- 90m מתחת

לנקודה בה התחילה.

חשבו את מקדם החיכוך, לא חסרים נתונים.

**(5) שרשרת על גלגלת**

שרשרת בעלת מסה M ואורך L מונחת על גלגלת

אידיאלית התלויה מהתקרה.

השרשרת מונחת כך שרבע מהשרשרת בצד אחד של

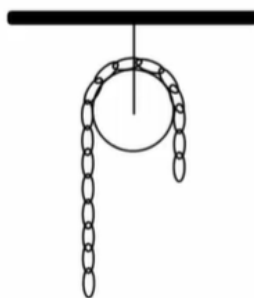
הגלגלת ושאר השרשרת בצד השני.

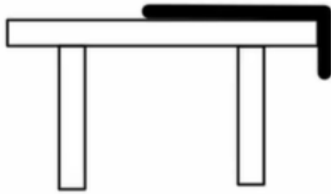
הנח שהחלק על הגלגלת עצמה זניח.

המערכת משוחררת ממנוחה.

מצאו את מהירות השרשרת ברגע שהקצה האחרון

שלה עובר את הגלגלת.





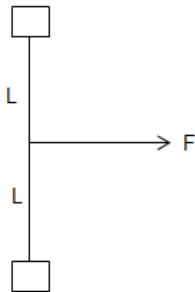
6) חבל מחליק משולחן אנרגיה ומשוואת תנועה*

חבל באורך L ומסה M מונח על שולחן חסר חיכוך כך שהקצה של החבל באורך d נשמט מחוץ לשולחן. החבל מוחזק ומשוחרר ממנוחה.

א. רשמו את האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית במהלך החלקת החבל.

ב. השתמשו בשימור אנרגיה ומצאו את משוואת התנועה של החבל.

ג. השתמשו במשוואת התנועה ומצאו את מהירות החלקת כל החבל מהשולחן למטה.



7) חוט מושך שתי מסות מחוברות בחוט**

חוט חסר מסה באורך $2L$ מחבר שתי מסות הנעות במישור אופקי ללא חיכוך.

כוח אופקי קבוע ונתון מושך את החוט במרכזו, בכיוון מאונך לחוט.

הנח שהמסות מתנגשות ונדבקות בהתנגשות. כמה אנרגיה הלכה לאיבוד בהתנגשות?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. בנקודת הרפיון של הקפיץ.} \quad \text{ב. } V = \sqrt{\frac{kd^2}{m_1 + m_2}}$$

$$(2) \quad \text{א. } a_{(x)} = 15x^2 - 7x - 3 \quad \text{ב. } x = 0.738\text{m} \quad \text{ג. } W = 0.75\text{J}$$

$$\text{ד. } V = 4.64 \frac{m}{s}$$

$$(3) \quad \text{א. (1) } x = 12 \quad \text{(2) } F = 103.7\text{N} \quad \text{ב. } x = 2\text{m} \quad \text{ג. } E_k = 62.5\text{J}$$

$$\text{ד. } W = 3935\text{J}$$

$$(4) \quad 0.1$$

$$(5) \quad V = \sqrt{\frac{3gL}{8}}$$

$$(6) \quad \text{א. } E = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{M}{2}g\frac{y^2}{2} \quad \text{ב. } \ddot{y} = \frac{gy}{L}$$

$$\text{ג. } V(y=L) = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - d^2)}$$

$$(7) \quad \Delta E = F \cdot l$$

תרגילים מסכמים כולל תנועה מעגלית:

שאלות:

(1) תנאי להשלים סיבוב עם החיכוך במישור משופע

גוף בעל מסה m מחליק על גבי מסילה המתוארת באיור.

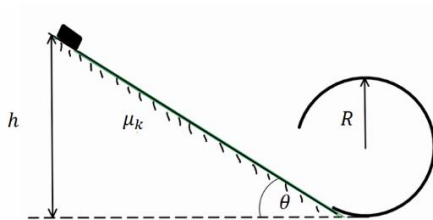
מקדם החיכוך בין הגוף למישור המשופע הוא μ_k .

זווית המישור היא θ .

החלק המעגלי חסר חיכוך.

מצא את h הנמוך ביותר עבורו הגוף ישלים

סיבוב בחלק העגול.



(2) שני חרוזים על טבעת מתרוממת*

טבעת בעלת רדיוס R ומסה M תלויה מהתקרה

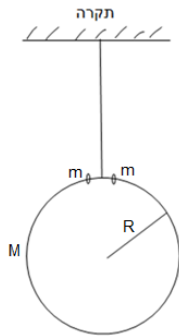
באמצעות חוט. מניחים בקצה העליון של הטבעת שני

חרוזים בעלי מסה m זהה.

החרוזים מתחילים ליפול ממנוחה לשני צדי הטבעת.

מצא את היחס בין המסות הדרוש על מנת שהטבעת

תתרומם במהלך נפילת הכדורים.



(3) מסה מסתובבת על שולחן ונמשכת למרכז*

מסה m נעה על שולחן חסר חיכוך בתנועה מעגלית ברדיוס R ובמהירות v_0 .

חוט קשור אל המסה הולך למרכז השולחן ועובר דרך גלגלת אידיאלית וחור בשולחן.

מושכים את החוט כך שהמסה מתקרבת למרכז.

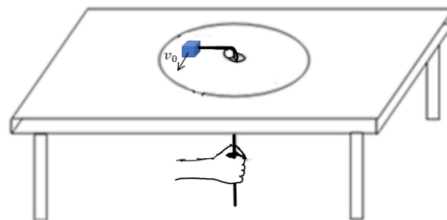
א. מהי המהירות הזוויתית כתלות ב- r (המרחק ממרכז הסיבוב).

השתמשו בשיקולי כוחות בלבד. רמז: אין כוחות בציר $\hat{\theta}$.

ב. הוכיחו שהעבודה שהושקעה במשיכת החוט עד לרדיוס R_2 כלשהו הקטן

מ- R זהה לשינוי באנרגיה הקינטית של המסה.

בסעיף זה ניתן להניח שהמהירות הרדיאלית קבועה.



תשובות סופיות:

$$h_{\min} = \frac{2.5R}{1 - \frac{\mu_k}{\tan \theta}} \quad (1)$$

$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\omega(r) = \frac{v_0 R}{r^2} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ב. הוכחה.