

אלגברה ליניארית

פרק 9 - ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות.....1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות.....2

העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות 1-5, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y); \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z); \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|); \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z); \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z); \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

(1) כן (2) כן (3) לא (4) לא (5) כן

גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-3, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

(4) מצא העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}$.

(5) מצא העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow U$.

(6) הוכח כי אם $\dim \text{Im} T = \dim \text{Ker} T$ אז הממד של V זוגי.

(7) הוכח או הפרך:

א. קימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ שעבורה $\text{Ker} T = \text{Im} T$.

ב. קימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ שעבורה $\text{Ker} T = \text{Im} T$.

תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של \mathbb{R}^3 , מימד: 3.

(2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

(3) גרעין – בסיס: $\{(1,-2,1,0), (-7,3,0,1)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$, מימד: 2.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) לא.