אלגברה ליניארית

פרק 8 - ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-5** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים :

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) נתון $A=\begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?

7) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים : $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=-4$.

מצא את המטריצה A .

8) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 , בעלת וקטורים עצמיים

$v_3=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, המתאימים לערכים העצמיים : $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

9) נתונה מטריצה ריבועית A. הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע״ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע״ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע״ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע״ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

תשובות סופיות

1) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,
וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)$

2) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

3) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

4) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

5) $x=1, x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i},1+\sqrt{3i},-2\right)$,
$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i},1-\sqrt{3i},-2\right)$

6) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

7) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{bmatrix}$

8) אין כזו מטריצה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.