אלגברה ליניארית ב

פרק 2 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצא מטריצה אופיינית.

ב. מצא פולינום אופייני.

ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצא וקטורים עצמיים.

ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009}.

ט. מצא את הפולינום המינימלי.

י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **6-5** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP=D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-7** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12) נתון $A=\begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$.
לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

13) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.
א. מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הערכים העצמיים של A יהיו **1** ו-**1-** **בלבד**.
ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_3=-4$, $\lambda_2=2$, $\lambda_1=6$.

מצא את המטריצה A.

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_3=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_1=1$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A.

הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.

ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm1$.

ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B, מסדר n. הוכח או הפרך:

א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B,
אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k, המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A, מצא את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3.

ידוע כי v_1,v_2 הם ו״ע של A, שונים מאפס, המתאימים לע״ע $\lambda=1$,
וכי v_3 הוא ו״ע, שונה מאפס, המתאים לע״ע $\lambda=-1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1,v_2 בת״ל, אז $A^{2018}=I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1,v_2.

21) נתונות שתי מטריצות מסדר n: מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה.
הוכח או הפרך:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.

ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n, שעבורן v הוא ו״ע.

א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n.

ב. עבור $v=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $n=2$, מצאו בסיס ל- W.

23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.
נתונה המטריצה $B=A^4-2A^2+10A-4I$.
הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ.
יהי $p(x)$ פולינום.
הוכח ש- v ו״ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

24) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A.

ב. עבור איזה ערך של a, הזוג $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A?

ג. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור שאינו ו"ע של A.
הוכיחו כי הקבוצה $\{u,Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

25) תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$ כך ש-$AB=BA$.
נניח כי $\operatorname{rank}(A)=n-1$, ו-$v$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A,
השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.
הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.
1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל- $p(x)=x^2-\operatorname{tr}(A)x+|A|$.
2. נתון כי $\operatorname{tr}(A)=4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה
יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n.
נניח כי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$ הפולינום האופייני של A.
הוכח כי $a_{n-1}=-\operatorname{tr}(A)$, $a_0=(-1)^n|A|$.

27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=1$.
הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה B.

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל- $\operatorname{tr}(B)$.

28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n.
ידוע כי $\operatorname{rank}(B)=k$, כאשר $k<n$.
הוכח כי 0 ערך עצמי של B ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

29) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.
הוכח שהמטריצה ניתנת ללכסון.

30) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ (מטריצה עם שורה אחת).
מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A^TA (הנח $n>1$).

31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2=A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.
א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A.
ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
ד. הוכח כי A ניתנת ללכסון.
ה. הוכח כי $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.
הוכח או הפרך:
א. קיים תת מרחב $W_\alpha=\{u \mid Au=\alpha u\}$ של R^5, כך ש-$\dim W_\alpha \geq 1$.
ב. אם u_1,u_2 ו"ע של A, אז גם הווקטור u_1+u_2 ו"ע של A.
ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A, אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
ד. אם A לכסינה מעל R, אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R.

33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.
נתון כי $\det(A)=tr(A)=0$ וכי $\lambda=1$ ערך עצמי של המטריצה.
הוכח כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2,
והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4.
מכאן נובע ש :

א. $\operatorname{rank}(A)=4$

ב. A לכסינה.

ג. $\operatorname{tr}(A)>10$

ד. $|A|\le 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A, כך ש- $A^2v=2v$.

35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0<\operatorname{rank}(A-10I)<\operatorname{rank}(A-4I)<3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A.

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A, ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A=10I$, או ש- $A=4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.
הוכח או הפרך :

א. אם v וקטור עצמי של A, אז v וקטור עצמי גם של A^n.

ב. אם v וקטור עצמי של A^n, אז v וקטור עצמי גם של A.

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

37) נתונה מטריצה A, שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x)=(x-1)^2$.
הוכח כי המטריצה $A^2+4A+3I$ הפיכה.

38) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x)=x^2+bx+c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A\in M_2[R]$ מקיימת $|A|<0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=(-1,4,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=3}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=(1,-2,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=4}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=(-1,2)$, $\boldsymbol{v}_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

13) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. לא לשתיהן.

14) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

15) אין כזו מטריצה.

16) א. הפרכה: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. ב. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

24) א. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

25) הוכחה

26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$ ב. הוכחה.

27) הוכחה.

28) הוכחה.

29) הוכחה.

30) 0 ו- $tr(A)$.

31) א. הוכחה. ב. $p(x)=x,\ p(x)=x-1,\ p(x)=x(x-1)$ ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. הוכחה.

32) הוכחה.

33) הערכים העצמיים הם: $0,1,-1$.

34) הוכחה.

35) א. $p(x)=(x-10)^2(x-4)$
ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;
4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.
ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

36) הוכחה.

37) הוכחה.

38) א. $p_{4A}(x)=x^2+4bx+16c$ ב. הוכחה.

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש-A ו-B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A|=|B|$

ב. $\text{tr}(A)=\text{tr}(B)$

ג. ל-A ו-B אותו פולינום אופייני.

2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP=B$, אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $4A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b, כך שהמטריצה A דומה למטריצה B?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n: A, B, C. הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל-B, אז B דומה ל-A.

ג. אם A דומה ל-B ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.

ד. אם A דומה ל-B ושתיהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל-B^{-1}.

ה. אם A דומה ל-B, אז A^k דומה ל-B^k, לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל-B ו-$q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל-$q(B)$.

ז. אם A דומה ל-B, אז A^T דומה ל-B^T.

ח. אם A דומה ל-B, אז $\text{rank}(A)=\text{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל-B, אז $\text{Null}(A)=\text{Null}(B)$.

הערה – $\text{Null}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

6) הוכח או הפרך:

א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.

ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.

ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2.
חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת:

א. $\operatorname{rank}(A)$

ב. $\dim\operatorname{Ker}(A)$

ג. $\operatorname{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע״ע עבור $A^T A$.

ו. ע״ע עבור $(4A^2+10A+I)^{-1}$.

הערה – $\dim\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Nullity}(A)$

8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) לא.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) הוכחה.