

אלגברה לינארית

פרק 5 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות..... 1
2. דימיון מטריצות..... 11

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- מצא מטריצה אופיינית.
- מצא פולינום אופייני.
- מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- מצא וקטורים עצמיים.
- קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
- כלומר, מצא מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009} .
- מצא את הפולינום המינימלי.
- קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה. כלומר, מצא מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית. פתור פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (12) \text{ נתון}$$

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix} \quad (13) \text{ נתונה המטריצה הממשית}$$

- א. מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- בלבד.
 ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -4$.
מצא את המטריצה A .

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 ,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.
במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

- כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
- כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
- כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.
- קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית A .

הוכח או הפרך:

- 0 ערך עצמי של המטריצה A , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.
- אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .
- ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.
- ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.
- אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .
- אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.
- אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

(18) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B , מסדר n . הוכח או הפרך:
א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B , אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

(19) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
א. הוכיחו כי לכל סקלר k , המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.
ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A , מצא את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

(20) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 .
ידוע כי v_1, v_2 הם ו"ע של A , שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda = 1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda = -1$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:
א. אם הווקטורים v_1, v_2 בת"ל, אז $A^{2018} = I$.
ב. A ניתנת ללכסון.
ג. v_3 הוא צרוף לינארי של הווקטורים v_1, v_2 .

(21) נתונות שתי מטריצות מסדר n : מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכח או הפרך:

א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.
ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.

(22) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n , שעבורן v הוא ו"ע. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n .

ב. עבור $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = 2$, מצאו בסיס ל- W .

(23) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4 . נתונה המטריצה $B = A^4 - 2A^2 + 10A - 4I$.

הוכח ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשב את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ . יהי $p(x)$ פולינום.

הוכח ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

(24) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

א. עבור $a=3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A .

ב. עבור איזה ערך של a , הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A ?

ג. יהי $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$ וקטור שאינו ו"ע של A .

הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

(25) תהיינה A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$ כך ש- $AB=BA$.

נניח כי $\text{rank}(A) = n-1$, ו- v הוא וקטור עצמי של המטריצה A ,

השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.

הוכח כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B .

(26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל- $p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|$.

2. נתון כי $\text{tr}(A) = 4$. חשב את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה

יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n .

נניח כי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ הפולינום האופייני של A .

הוכח כי $a_0 = (-1)^n |A|$, $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$.

(27) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\text{rank}(B) = 1$.

הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה B .

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל- $\text{tr}(B)$.

(28) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר n .

ידוע כי $\text{rank}(B) = k$, כאשר $k < n$.

הוכח כי 0 ערך עצמי של B ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

(29) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.

הוכח שהמטריצה ניתנת לליכסון.

(30) נתונה מטריצה $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ (מטריצה עם שורה אחת).

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A^T A$ (הנח $n > 1$).

(31) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2 = A$.

תהי A מטריצה אידמפוטנטית.

א. הוכח כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.

ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A .

ג. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

ד. הוכח כי A ניתנת לליכסון.

ה. הוכח כי $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

(32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5.

הוכח או הפרך:

א. קיים תת מרחב $W_\alpha = \{u \mid Au = \alpha u\}$ של R^5 , כך ש- $\dim W_\alpha \geq 1$.

ב. אם u_1, u_2 ו"ע של A , אז גם הווקטור $u_1 + u_2$ ו"ע של A .

ג. אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A , אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.

ד. אם A לכסינה מעל R , אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R .

(33) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3.

נתון כי $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$ וכי $\lambda = 1$ ערך עצמי של המטריצה.

הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

(34) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים. ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2, והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4. מכאן נובע ש:

א. $\text{rank}(A) = 4$

ב. A לכסינה.

ג. $\text{tr}(A) > 10$

ד. $|A| \leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי v של A , כך ש- $A^2v = 2v$.

(35) תהי A מטריצה מסדר 3, המקיימת $0 < \text{rank}(A - 10I) < \text{rank}(A - 4I) < 3$.

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A .

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A , ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.

ג. קבע האם A הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A = 10I$, או ש- $A = 4I$?

ה. קבע האם A לכסינה.

(36) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי.

הוכח או הפרך:

א. אם v וקטור עצמי של A , אז v וקטור עצמי גם של A^n .

ב. אם v וקטור עצמי של A^n , אז v וקטור עצמי גם של A .

ג. אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.

ד. אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

(37) נתונה מטריצה A , שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x) = (x-1)^2$.

הוכח כי המטריצה $A^2 + 4A + 3I$ הפיכה.

(38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x) = x^2 + bx + c$.

מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.

ב. מטריצה $A \in M_2[R]$ מקיימת $|A| < 0$.

הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = x(x-1)^2 \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. לא הפיכה.

$$(2) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=1, x=2$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. הפיכה.

$$(3) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1, x=2$$

$x=0$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$$\text{ה.} \quad \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז.} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח.} \quad \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix} \quad \text{ט.} \quad m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. לא הפיכה.}$$

$$(4) \quad \begin{matrix} \text{א.} & \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \\ \text{ב.} & p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \end{matrix}$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

$$-x=-4 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1, -x=2 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1, -x=6 \text{ - ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{ \langle 0, 0, 1 \rangle \} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{ \langle 1, 1, 1 \rangle \} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{ \langle -1, 1, 0 \rangle \} \text{ - ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

י. הפיכה.

(5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, v_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

(6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $v_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle$. לא ניתנת ללכסון.

(7) ערכים עצמיים: $x_1=2, x_{2,3}=3$,

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(8) v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x=-1, x=3$$

$$(11) v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) k_1=3, k_2=-\frac{32}{9}$$

$$(13) \text{א. } a=3, b=-4 \text{ או } a=1, b=0 \quad \text{ב. לא לשתייהן.}$$

$$(14) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(15) אין כזו מטריצה.

(16) א. הפרכה: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ב. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. ג. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ד. הוכחה.

(17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.

ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

(18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(19) א. הוכחה. ב. $4+k$ הוא ערך עצמי של $A+kI$.

(20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

(21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

(22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

(24) א. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ב. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ג. הוכחה.

(25) הוכחה

(26) א.1. הוכחה. א.2. $|A|=4$. ב. הוכחה.

(27) הוכחה.

(28) הוכחה.

(29) הוכחה.

(30) 0 ו- $tr(A)$.(31) א. הוכחה. ב. $p(x)=x$, $p(x)=x-1$, $p(x)=x(x-1)$. ג. הוכחה.

ד. הוכחה. ה. הוכחה.

(32) הוכחה.

(33) הערכים העצמיים הם: $0, 1, -1$.

(34) הוכחה.

(35) א. $p(x) = (x-10)^2(x-4)$.

ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;

4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.

ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

(36) הוכחה.

(37) הוכחה.

(38) א. $p_{4A}(x) = x^2 + 4bx + 16c$. ב. הוכחה.

דמיון מטריצות

שאלות

(1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:

א. $|A| = |B|$

ב. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(2) הוכח באינדוקציה: אם $P^{-1}AP = B$, אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$. הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b , כך שהמטריצה A דומה למטריצה B ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n : A, B, C . הוכח כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B , אז B דומה ל- A .

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

ד. אם A דומה ל- B ושתייהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1} .

ה. אם A דומה ל- B , אז A^k דומה ל- B^k , לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B , אז A^T דומה ל- B^T .

ח. אם A דומה ל- B , אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B , אז $\text{Null}(A) = \text{Null}(B)$.

הערה – $\text{Null}(A)$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

(6) הוכח או הפרך :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א. $\text{rank}(A)$

ב. $\dim \text{Ker}(A)$

ג. $\text{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$.

הערה – $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

(8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תשובות סופיות

- (1) הוכחה.
 (2) הוכחה.
 (3) הוכחה.
 (4) לא.
 (5) הוכחה.
 (6) הוכחה.
 (7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$
 (8) הוכחה.