

# אלגברה ליניארית ב

פרק 3 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות..... 1
2. דימיון מטריצות..... 11

## ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

### שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.  
כלומר, מצא מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב  $A^{2009}$ .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.  
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד,  
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה. כלומר, מצא מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , כאשר  $D$  מטריצה אלכסונית. פתור פעם מעל  $\mathbb{C}$  ופעם מעל  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (12) \text{ נתון}$$

לאיזה ערך של הפרמטר  $k$  המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix} \quad (13) \text{ נתונה המטריצה הממשית}$$

- א. מצאו את ערכי  $a$  ו- $b$ , עבורם הערכים העצמיים של  $A$  יהיו 1 ו-1- בלבד.  
 ב. עבור ערכי  $a$  ו- $b$  שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

14) תהי  $A$  מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -4$ . מצא את המטריצה  $A$ .

15) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ ,

בעלת וקטורים עצמיים  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ . במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

16) הוכח או הפרך:

א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה  $A$  אשר הווקטור  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$  הוא וייע שלה השייך לעייע 14.

17) נתונה מטריצה ריבועית  $A$ .

הוכח או הפרך:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה  $A$ , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם  $A$  הפיכה ו- $\lambda$  עייע של  $A$ , אז  $\frac{1}{\lambda}$  הוא ערך עצמי של  $A^{-1}$ .

ג. ל- $A$  ול- $A^T$  יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- $A$  ול- $A^T$  יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של  $A$  הוא  $\lambda$ , אז  $\lambda$  הוא עייע של  $A$ .

ו. אם  $A^{-1} = A^T$  ואם  $\lambda$  הוא עייע של  $A$ , אז  $\lambda = \pm 1$ .

ז. אם  $A^2 = A$  ואם  $\lambda$  הוא עייע של  $A$ , אז  $\lambda = 0$  או  $\lambda = 1$ .

- 18** נתונות שתי מטריצות ריבועיות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ . הוכח או הפרך:
- ל- $AB$  ו- $BA$  אותם ערכים עצמיים.
  - נניח ש- $v$  וקטור עצמי, שונה מאפס, של  $A$  ו- $B$ , אז  $v$  גם הוא וקטור עצמי של המטריצה  $4A+10B$ .
- 19** תהי  $A$  מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.
- הוכיחו כי לכל סקלר  $k$ , המטריצה  $A+kI$  ניתנת ללכסון.
  - אם  $4$  הוא ערך עצמי של המטריצה  $A$ , מצא את הערך העצמי של המטריצה  $A+kI$ .
- 20** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $3 \times 3$ .
- ידוע כי  $v_1, v_2$  הם ו"ע של  $A$ , שונים מאפס, המתאימים לע"ע  $\lambda = 1$ , וכי  $v_3$  הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע  $\lambda = -1$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות:
- אם הווקטורים  $v_1, v_2$  בת"ל, אז  $A^{2018} = I$ .
  - $A$  ניתנת ללכסון.
  - $v_3$  הוא צרוף לינארי של הווקטורים  $v_1, v_2$ .
- 21** נתונות שתי מטריצות מסדר  $n$ : מטריצה  $B$  הניתנת ללכסון ומטריצה  $Q$  הפיכה. הוכח או הפרך:
- המטריצה  $Q^{-1}BQ$  אלכסונית.
  - המטריצה  $Q^{-1}BQ$  ניתנת ללכסון.
- 22** נסמן ב- $W$  את קבוצת כל המטריצות מסדר  $n$ , שעבורן  $v$  הוא ו"ע.
- הוכיחו כי  $W$  תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר  $n$ .
  - עבור  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $n = 2$ , מצאו בסיס ל- $W$ .
- 23** פתור את 2 הסעיפים הבאים:
- ידוע שלמטריצה  $A$  יש וקטור עצמי  $v$  השייך לערך העצמי  $4$ . נתונה המטריצה  $B = A^4 - 2A^2 + 10A - 4I$ . הוכח ש- $v$  וקטור עצמי גם של המטריצה  $B$  וחשב את הערך העצמי המתאים לו.
  - נתון ש- $v$  וקטור עצמי של מטריצה  $A$  השייך לערך עצמי  $\lambda$ . יהי  $p(x)$  פולינום. הוכח ש- $v$  ו"ע של המטריצה  $p(A)$  השייך לערך עצמי  $p(\lambda)$ .

(24) תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ , כאשר  $a$  קבוע ממשי.

א. עבור  $a=3$ , תנו דוגמה לזוג  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  שאינו וקטור עצמי של  $A$ .

ב. עבור איזה ערך של  $a$ , הזוג  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי של  $A$ ?

ג. יהי  $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$  וקטור שאינו ו"ע של  $A$ . הוכיחו כי הקבוצה  $\{u, Au\}$ , מהווה בסיס של  $\mathbb{R}^2$ .

(25) תהיינה  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n \times n$  כך ש- $AB = BA$ . נניח כי  $\text{rank}(A) = n-1$ , ו- $v$  הוא וקטור עצמי של המטריצה  $A$ , השייך לערך העצמי 0 של המטריצה. הוכח כי  $v$  הוא וקטור עצמי של המטריצה  $B$ .

(26) פתור את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית  $A$  מסדר 2.

1. הוכח כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל- $p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|$ .

2. נתון כי  $\text{tr}(A) = 4$ . חשב את  $|A|$ , אם ידוע בנוסף שלמטריצה יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית  $A$  מסדר  $n$ .

נניח כי  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  הפולינום האופייני של  $A$ .

הוכח כי  $a_0 = (-1)^n |A|$ ,  $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$ .

(27) נתונה מטריצה ריבועית  $B$  מסדר 4. ידוע כי  $\text{rank}(B) = 1$ .

הוכח:

א. 0 ע"ע של המטריצה  $B$ .

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0, הוא 3.

ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0, הוא 3 או 4.

ד. למטריצה  $B$  לכל היותר 2 ערכים עצמיים.

ה. אם למטריצה  $B$  ע"ע פרט ל-0, אז הוא שווה ל- $\text{tr}(B)$ .

- (28) נתונה מטריצה ריבועית  $B$  מסדר  $n$ .  
 ידוע כי  $\text{rank}(B) = k$ , כאשר  $k < n$ .  
 הוכח כי 0 ערך עצמי של  $B$  ומצא את הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שלו.

(29) נתונה מטריצה  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי שונה מ-0.  
 הוכח שהמטריצה ניתנת לליכסון.

- (30) נתונה מטריצה  $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  (מטריצה עם שורה אחת).  
 מצא את הערכים העצמיים של המטריצה  $A^T A$  (הנח  $n > 1$ ).

- (31) מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית, אם  $A^2 = A$ .  
 תהי  $A$  מטריצה אידמפוטנטית.

- א. הוכח כי הערכים העצמיים של  $A$  הם 0 או 1 בלבד.  
 ב. רשום את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של  $A$ .  
 ג. הוכח כי הפולינום האופייני של  $A$  מתפרק לגורמים לינאריים.  
 ד. הוכח כי  $A$  ניתנת לליכסון.  
 ה. הוכח כי  $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$  (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

- (32) תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר 5.  
 הוכח או הפרך:

- א. קיים תת מרחב  $W_\alpha = \{u \mid Au = \alpha u\}$  של  $R^5$ , כך ש- $\dim W_\alpha \geq 1$ .  
 ב. אם  $u_1, u_2$  ו"ע של  $A$ , אז גם הווקטור  $u_1 + u_2$  ו"ע של  $A$ .  
 ג. אם המטריצה  $B$  שקולת שורות למטריצה  $A$ , אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.  
 ד. אם  $A$  לכסינה מעל  $R$ , אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.  
 ה. אם כל הערכים העצמיים של  $A$  שונים זה מזה, אז המטריצה  $A$  לכסינה מעל  $R$ .

- (33) תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר 3.  
 נתון כי  $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$  וכי  $\lambda = 1$  ערך עצמי של המטריצה.  
 הוכח כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצא את כל הערכים העצמיים שלה.

**(34)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים. ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2, והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4. מכאן נובע ש:

א.  $\text{rank}(A) = 4$

ב.  $A$  לכסינה.

ג.  $\text{tr}(A) > 10$

ד.  $|A| \leq 127$

ה. קיים וקטור עצמי  $v$  של  $A$ , כך ש- $A^2v = 2v$ .

**(35)** תהי  $A$  מטריצה מסדר 3, המקיימת  $0 < \text{rank}(A - 10I) < \text{rank}(A - 4I) < 3$ .

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה  $A$ .

ב. מצא את הערכים העצמיים של המטריצה  $A$ , ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל עי"ע.

ג. קבע האם  $A$  הפיכה.

ד. האם נכון לומר ש- $A = 10I$ , או ש- $A = 4I$ ?

ה. קבע האם  $A$  לכסינה.

**(36)** תהי  $A$  מטריצה ריבועית ויהי  $n$  מספר טבעי. הוכח או הפרך:

א. אם  $v$  וקטור עצמי של  $A$ , אז  $v$  וקטור עצמי גם של  $A^n$ .

ב. אם  $v$  וקטור עצמי של  $A^n$ , אז  $v$  וקטור עצמי גם של  $A$ .

ג. אם  $A$  לכסינה, אז  $A^n$  לכסינה.

ד. אם  $A^n$  לכסינה, אז  $A$  לכסינה.

**(37)** נתונה מטריצה  $A$ , שהפולינום המינימלי שלה הוא  $m(x) = (x-1)^2$ . הוכח כי המטריצה  $A^2 + 4A + 3I$  הפיכה.

**(38)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הפולינום האופייני של מטריצה  $A$  הוא  $p_A(x) = x^2 + bx + c$ .

מצאו את הפולינום האופייני  $p_{4A}(x)$  של המטריצה  $4A$ .

ב. מטריצה  $A \in M_2[R]$  מקיימת  $|A| < 0$ .

הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

## תשובות סופיות

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג. } x=0, x=1 \quad \text{ד. } (1) \quad \text{ט. } m(x) = x(x-1)^2 \quad \text{י. } \text{לא הפיכה.}$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=0$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1,1,1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=0} = sp\{\langle 1,0,0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $\langle 1,1,1 \rangle, \langle 1,0,0 \rangle$  – ו-ח. לא ניתנת.

ט.  $m(x) = x(x-1)^2 \quad \text{deg} = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי. י. לא הפיכה.

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג. } x=1, x=2 \quad \text{ד. } (2) \quad \text{ט. } m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{י. } \text{לא הפיכה.}$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=2$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1,0,0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=2} = sp\{\langle 0,0,1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $\langle 0,0,1 \rangle, \langle 1,0,0 \rangle$  – ו-ח. לא ניתנת.

ט.  $m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{deg} = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי. י. הפיכה.

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג. } x=0, x=1, x=2 \quad \text{ד. } (3) \quad \text{ט. } m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. } \text{לא הפיכה.}$$

$x=0$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=1$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי: 1.

ד.  $V_{x=0} = sp\{\langle -1,0,1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=1} = sp\{\langle 0,1,0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $\langle 0,1,0 \rangle, \langle 1,0,1 \rangle, \langle -1,0,1 \rangle$  – ו. ניתנת ללכסון. ז.  $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח.  $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$  ט.  $m(x) = x(x-1)(x-2)$  י. לא הפיכה.

$$p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{ב.} \quad \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

1.  $x=-4$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=6$  – ריבוב אלגברי: 1.

$$\text{ד. } V_{x=6} = \text{sp}\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$V_{x=2} = \text{sp}\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$V_{x=-4} = \text{sp}\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ז.} \quad \text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.}$$

$$m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{ט.} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ח.}$$

י. הפיכה.

(5) אין פתרונות מעל  $\mathbb{R}$ , ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, \quad \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, \quad \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

(6) ערכים עצמיים:  $x=3$ , וקטורים עצמיים:  $\mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle$ . לא ניתנת ללכסון.

(7) ערכים עצמיים:  $x_1 = 2, x_{2,3} = 3$

$$\text{וקטורים עצמיים: } V_{x=2} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0)$$

$$(8) \quad \mathbf{v}_{x=-2} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=3} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad \mathbf{v}_{x=-1} = (-1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_{x=4} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (1, -2, 1), \quad x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad \mathbf{v}_{x=3} = (1, 2), \quad \mathbf{v}_{x=-1} = (-1, 2), \quad x=-1, x=3$$

$$(11) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) \quad k_1 = 3, k_2 = -\frac{32}{9}$$

(13) א.  $a=3, b=-4$  או  $a=1, b=0$  ב. לא שתייהן.

$$(14) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(15) אין כזו מטריצה.

(16) א. הפרכה:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . ב.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . ג.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . ד. הוכחה.

(17) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.

ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.

(18) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(19) א. הוכחה. ב.  $4+k$  הוא ערך עצמי של  $A+kI$ .

(20) א. הפרכה. ב. הוכחה. ג. הפרכה.

(21) א. הפרכה. ב. הוכחה.

(22) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(23) א. הערך העצמי הוא 260. ב. הוכחה.

(24) א.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . ב.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . ג. הוכחה.

(25) הוכחה

(26) א.1. הוכחה. א.2.  $|A|=4$ . ב. הוכחה.

(27) הוכחה.

(28) הוכחה.

(29) הוכחה.

(30)  $0$  ו- $tr(A)$ .

(31) א. הוכחה. ב.  $p(x) = x(x-1)$ ,  $p(x) = x-1$ ,  $p(x) = x$ . ג. הוכחה.

ד. הוכחה. ה. הוכחה.

(32) הוכחה.

(33) הערכים העצמיים הם:  $0, 1, -1$ .

(34) הוכחה.

(35) א.  $p(x) = (x-10)^2(x-4)$ .

ב. 10 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 2;

4 ע"ע עם ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי = 1.

ג. לא הפיכה. ד. לא. ה. לכסינה.

(36) הוכחה.

(37) הוכחה.

(38) א.  $p_{4A}(x) = x^2 + 4bx + 16c$ . ב. הוכחה.

## דמיון מטריצות

### שאלות

(1) ידוע ש- $A$  ו- $B$  מטריצות דומות. הוכח כי:

א.  $|A| = |B|$

ב.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- $A$  ו- $B$  אותו פולינום אופייני.

(2) הוכח באינדוקציה: אם  $P^{-1}AP = B$ , אז  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $n$  וידוע כי  $A$  דומה למטריצה  $4A$ . הוכיחו כי  $A$  מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות:  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$ .

האם קיימים קבועים ממשיים  $a, b$ , כך שהמטריצה  $A$  דומה למטריצה  $B$ ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ :  $A, B, C$ . הוכח כי:

א.  $A$  דומה לעצמה.

ב. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $B$  דומה ל- $A$ .

ג. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

ד. אם  $A$  דומה ל- $B$  ושתייהן הפיכות, אז  $A^{-1}$  דומה ל- $B^{-1}$ .

ה. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^k$  דומה ל- $B^k$ , לכל  $k$  טבעי.

ו. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $q(x)$  פולינום, אז  $q(A)$  דומה ל- $q(B)$ .

ז. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^T$  דומה ל- $B^T$ .

ח. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

ט. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{Null}(A) = \text{Null}(B)$ .

הערה –  $\text{Null}(A) =$  מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

6) הוכח או הפרך :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.  
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.  
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) ידוע שלמטריצה ריבועית  $A$  מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשב כל אחד מהבאים או הסבר מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א.  $\text{rank}(A)$

ב.  $\dim \text{Ker}(A)$

ג.  $\text{tr}(A)$

ד.  $|A^T A|$

ה. עייע עבור  $A^T A$ .

ו. עייע עבור  $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$ .

הערה –  $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

8) הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

### תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) לא.

5) הוכחה.

6) הוכחה.

7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו.  $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

8) הוכחה.