מתמטיקה לביולוגים חד חוגי מורחב

פרק 23 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-5** מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6) נתון $A=\begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A?

7) נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערכי a ו-b, עבורם הערכים העצמיים של A יהיו **1** ו-**-1** **בלבד**.

ב. עבור ערכי a ו-b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

8) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$.

מצא את המטריצה A.

9) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3, בעלת וקטורים עצמיים $v_3=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_3=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_1=1$.
במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

10) הוכח או הפרך:
א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.
ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix}4\\1\\10\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

11) נתונה מטריצה ריבועית A. הוכח או הפרך:
א. 0 ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.
ב. אם A הפיכה ו-λ ע"ע של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.
ג. ל-A ול-A^T יש את אותו פולינום אופייני.
ד. ל-A ול-A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.
ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ, אז λ הוא ע"ע של A.
ו. אם $A^{-1}=A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=\pm 1$.
ז. אם $A^2=A$ ואם λ הוא ע"ע של A, אז $\lambda=0$ או $\lambda=1$.

תשובות סופיות

1) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,
וקטורים עצמיים: $v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1),\ \ v_{x=3}^{(2)}=(1,1,0),\ V_{x=2}=(1,1,1)$

2) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

3) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

4) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

5) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,
$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

6) $k_1=3,\ k_2=-\frac{32}{9}$

7) א. $a=3,\ b=-4$ או $a=1,\ b=0$ ב. לא לשתיהן.

8) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{bmatrix}$

9) אין כזו מטריצה.

10) א. הפרכה: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. ב. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

11) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.
ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.