

# הסתברות

פרק 39 - פונקציה יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## פונקציה יוצרת מומנטים:

### רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות:  $M_X(t) = E(e^{tx})$ .  
 אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_k e^{tk} \cdot P(X = k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_x e^{tx} \cdot f(x) dx$$

המומנט מסדר  $n$  מוגדר להיות:  $E(X^n)$ .

מומנט מסדר  $n$  של משתנה מקרי  $X$  מתקבל מהנגזרת ה- $n$ ית לפי  $t$  של פונקציית

יוצרת המומנטים  $M_X(t)$  בנקודה שבה  $t = 0$ . כלומר:  $M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = E(X^n)$ .

### משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

### תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ - כלל שרשרת}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית:  $X \sim \exp(\lambda)$ ,

היא:  $\frac{\lambda}{\lambda - t}$ . מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

## שאלות:

- (1) נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.  
 א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.  
 ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

$X$	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- (2) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית:  $X \sim B(n, p)$ , ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.
- (3) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית:  $X \sim G(P)$ , וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.
- (4) מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית:  $x \sim p(\lambda)$ . מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

- (5) יהי  $X$  משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{אחר } t \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של  $A$ .  
 ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של  $X$ .

- (6) יהי  $X$  משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי  $m_x(t)$  פונקציית יוצרת המומנטים של  $X$ .  $Y$  הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים  $m_y(t)$ , ונתון:  $m_y(t) = t \cdot m_x(t)$ .  
 חשבו את התוחלת והשונות של  $Y$ .

**תשובות סופיות:**

- (1) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t}$  . ב.  $\frac{2}{3}$  .
- (2) פונקציה יוצרת מומנטים:  $(e^t \cdot p + 1 - p)^n$  .
- (3) פונקציה יוצרת מומנטים:  $\frac{e^t p}{1 - e^t \cdot (1 - p)}$  .
- (4) פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{\lambda(e^t - 1)}$  .
- (5) א.  $\frac{1}{1 - e^{-7}}$  . ב. פונקציה יוצרת מומנטים:  $\frac{e^7}{e^7 - 1} \cdot \frac{e^{7(t-1)} - 1}{t - 1}$  .
- (6) תוחלת: 1, שונות: 9.

## נספחים:

פונקציית התפלגות מצטברת $f(X)t$	פונקציית צפיפות $f(X)t$	התפלגות
$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t < b \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & else \end{cases}$	אחיד $U(a,b)$
$f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	$P_X(x)$	משמעות	משתנה מקרי
$[pe^t + q]^n$	$n \cdot p \cdot q$	$n \cdot p$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים: $P$ ההסתברות להצלחה. $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון $X$ - מספר ההצלחות	בינומי $Bin(n, p)$
$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$pq^{x-1}$ $x = 1, 2, \dots, \infty$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. $X$ - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה.	גיאומטרי $G(P)$
$e^{\lambda(e^t - 1)}$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$X$ - מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $.0, 1, \dots, \infty$ .	פואסוני $Pois(\lambda)$