מתמטיקה לחשבונאים ב

פרק 4 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

1) $f(x,y)=x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}$

2) $h(x,y)=\dfrac{\ln\left(e^{5x}\right)}{\sqrt[3]{ex^6-7y^6}}$

3) $f(x,y)=\ln\left(4^x\right)\cdot g\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right]$

4) נתון כי $z(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדוק האם הפונקציה $f(x,y)=\dfrac{x}{y^4}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{1}{z(x,y)}-4$ הומוגנית.

במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמט ממנה חלק,

כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.

מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצא עבור איזה ערך של הפרמטר α, כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.

כמו כן, מצא את סדר ההומוגניות עבור ה- α שמצאת.

א. $f(x,y)=\dfrac{x^4y+xy^\alpha}{4x+10y}$

ב. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}(\ln\alpha x-\ln y)$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז אם נחלק אותה ב- x^n,
נקבל פונקציה של $\frac{y}{x}$.

א. הדגם את הטענה על הפונקציות הבאות:
1. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$
2. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ב. הוכח את הטענה לעיל.

הערה
ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t=\frac{y}{x}$,
המקיימת $\frac{f(x,y)}{x^n}=g(t)$.

7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2, בהתאמה.
קבע, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f\cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f+g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.
ידוע כי $f_x(1,2)=10$, $f(1,2)=4$.
חשב את $f_x(1.5,3)$, $f_x(2,4)$, $f(0.5,1)$, $f(2,4)$.

9) נתונה פונקציה $f(x,y)=x^4+y^2z(x,y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4,10)=1$.

א. חשב את $f(2,5)$.

ב. ידוע כי $f_x(1,1)=4$.
חשב את $f_x(a,a)$, לכל קבוע a.

תשובות סופיות

1) הומוגנית מסדר 3.5.
2) הומוגנית מסדר -1.
3) הומוגנית מסדר 1.
4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
$f(x,y)=\frac{x}{y^4}+\frac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית מסדר -3.
$f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2.
$f(x,y)=-4$ הומוגנית מסדר 0.
5) א. עבור $\alpha=4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha>0$.
6) א.1. $g(t)=1-t+2t^2$ .2 $g(t)=\sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
7) א. הומוגנית מדרגה r_1+r_2. ב. הומוגנית מדרגה r_1-r_2.
ג. הומוגנית מדרגה $2r_1-\frac{r_2}{n}$.
ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1=r_2$. אחרת לא הומוגנית.
8) $f(0.5,1)=\frac{1}{4},\ f(2,4)=64$, $f_x(1.5,3)=33.75,\ f_x(2,4)=80$
9) א. $f(2,5)=\frac{1}{16}$ ב. $f_x(a,a)=4a^3$

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$.

א. הוכח שהפונקציה הומוגנית ומצא את דרגתה.

ב. הראה שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכח כי $\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x-\ln y)}$.

הוכח כי $x\cdot f_x=-y\cdot f_y$.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2,

ונגדיר $h(x,y)=x^2-y^2+f\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכח כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון: $h_x'(6,3)=9$, $f(8,1)=16$.

מצא את: $h(2,1)$ ואת $h_y'(2,1)$.

5) h ו- g הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x,y)=(x+y)h(x,y)+\frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2+y^2}$$

א. הוכח כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4,32)=16$, $f_y^{'}(1,8)=3$, $f_x^{'}(2,16)=12$.

מצא את: $f(1,8)$ ואת $g(1,8)$.

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים פונקציה $p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)$.

נתון: $p(1,2)=\frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2}$, $f_y^{'}(-1,-2)=-4$, $f_x^{'}(2,4)=64$.

חשב את: $g\left(\frac{1}{2},1\right)$.

7) הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$,

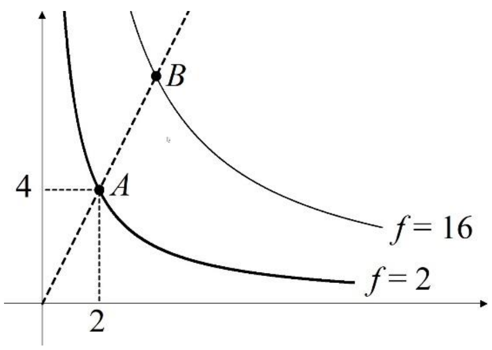
על ידי $u(x,y)=(f(x,y))^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$.

הסבר זאת בקצרה.

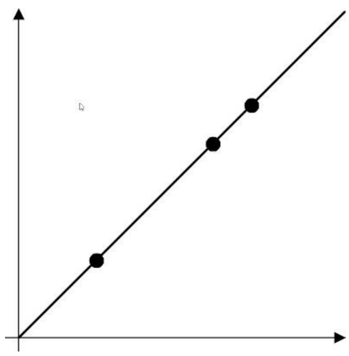
2. הוכח כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6(f(x,y))^2$.

היעזר בסעיף הקודם ובנתונים על f.



8) תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m,
המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=27$.
א. מצא את סדר ההומוגניות, m.
ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש"ע של f.
מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.
המשיק הוא $2x+3y=7$.
מצא את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
על הפונקציה g ידוע, כי $g'(8)=2$, $g(1)=3$, $g(4)=5$.
המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y), כך: $t=\frac{4y}{x}$.
מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y), באופן הבא:
$u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$.
א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?
ב. הוכח כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.
ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?
ד. הוכח כי $u_x(1,2)=-16$.



10) נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
הוכח כי $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=0$.

11) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $f_x(x,y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $f(2,4)=2^3 f(1,2)$,
אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1)=4$ $h_y'(2,1)=8$

5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8)=0$ $f(1,8)=9,$

6) $-\frac{3}{4}$

7) א. $\mathrm{B}(4,8)$ ב. 12 ג. שאלת הוכחה והסבר.

8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5)=\frac{54}{7}$, $f_y(2,1)=\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2,1)=\frac{108}{7}$,

9) א. 5 ב-ד. שאלות הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.