חשבון אינפיניטסימלי

פרק 6 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

1. פונקציות הומוגניות 1
2. משפט אוילר 4

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות **3-1** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

1) $f(x,y)=x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}$

2) $h(x,y)=\dfrac{\ln\left(e^{5x}\right)}{\sqrt[3]{ex^6-7y^6}}$

3) $f(x,y)=\ln\left(4^x\right)\cdot g\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right]$

4) נתון כי $z(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדוק האם הפונקציה $f(x,y)=\dfrac{x}{y^4}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{1}{z(x,y)}-4$ הומוגנית.

במידה ואינה הומוגנית, השמט ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.

מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצא עבור איזה ערך של הפרמטר α, כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.

כמו כן, מצא את סדר ההומוגניות עבור ה- α שמצאת.

א. $f(x,y)=\dfrac{x^4y+xy^{\alpha}}{4x+10y}$

ב. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}(\ln\alpha x-\ln y)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז אם נחלק אותה ב- x^n,
נקבל פונקציה של $\frac{y}{x}$.

א. הדגם את הטענה על הפונקציות הבאות:
1. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$
2. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ב. הוכח את הטענה לעיל.

הערה
ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n, אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t=\frac{y}{x}$,
המקיימת $\frac{f(x,y)}{x^n}=g(t)$.

7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2, בהתאמה.
קבע, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f\cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f+g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.
ידוע כי $f(1,2)=4\,,\ f_x(1,2)=10$.
חשב את $f(2,4),\ f(0.5,1),\ f_x(2,4),\ f_x(1.5,3)$.

9) נתונה פונקציה $f(x,y)=x^4+y^2z(x,y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4,10)=1$.
א. חשב את $f(2,5)$.
ב. ידוע כי $f_x(1,1)=4$.
חשב את $f_x(a,a)$, לכל קבוע a.

תשובות סופיות

1) הומוגנית מסדר 3.5.

2) הומוגנית מסדר -1.

3) הומוגנית מסדר 1.

4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$f(x,y)=\frac{x}{y^4}+\frac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית מסדר -3.

$f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2.

$f(x,y)=-4$ הומוגנית מסדר 0.

5) א. עבור $\alpha=4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha>0$.

6) א.1. $g(t)=1-t+2t^2$ .2 $g(t)=\sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.

7) א. הומוגנית מדרגה r_1+r_2. ב. הומוגנית מדרגה r_1-r_2.

ג. הומוגנית מדרגה $2r_1-\frac{r_2}{n}$.

ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1=r_2$. אחרת לא הומוגנית.

8) $f(0.5,1)=\frac{1}{4}$, $f(2,4)=64$, $f_x(1.5,3)=33.75$, $f_x(2,4)=80$

9) א. $f(2,5)=\frac{1}{16}$ ב. $f_x(a,a)=4a^3$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$.

א. הוכח שהפונקציה הומוגנית ומצא את דרגתה.

ב. הראה שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכח כי $\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x-\ln y)}$.

הוכח כי $x\cdot f_x=-y\cdot f_y$.

3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x,y)=x^2-y^2+f\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכח כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $h_x'(6,3)=9 \quad f(8,1)=16,$.

מצא את $h(2,1)$ ואת $h_y'(2,1)$.

5) h ו- g הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x,y)=(x+y)h(x,y)+\frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2+y^2}$$

א. הוכח כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4,32)=16$ $\quad f_y^{'}(1,8)=3,$ $\quad f_x^{'}(2,16)=12,$.

מצא את: $f(1,8)$ ואת $g(1,8)$.

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)$.

נתון: $p(1,2)=\frac{7}{2}$, $\quad h\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2}$, $\quad f_y^{'}(-1,-2)=-4,$ $\quad f_x^{'}(2,4)=64$.

חשב את: $g\left(\frac{1}{2},1\right)$.

7) הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

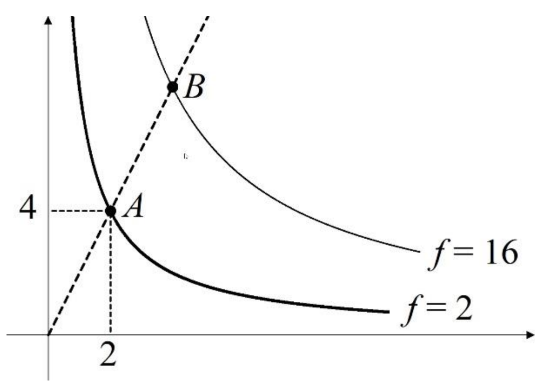
א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$, על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$.
הסבר זאת בקצרה.

2. הוכח כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$.
היעזר בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על f.



8) תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m,
המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=27$.

א. מצא את סדר ההומוגניות m.

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש"ע של f.
מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.
המשיק הוא $2x+3y=7$.
מצא את $f_x(1,0.5)$, $f_y(2,1)$, $f_x(2,1)$.

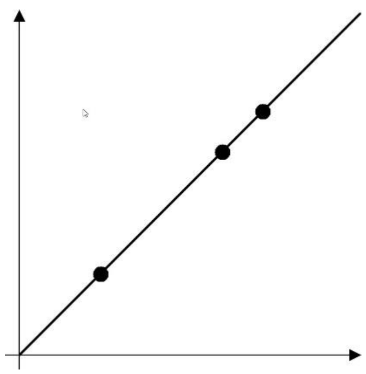
9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
על הפונקציה g ידוע, כי $g'(8)=2$, $g(1)=3$, $g(4)=5$.
המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x,y), כך: $t=\frac{4y}{x}$.
מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x,y), באופן הבא:
$u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$.

א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2)=-16$.



10) נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
הוכח כי $x^2 f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2 f_{yy}=0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) מפעל מייצר x חולצות ו- y מכנסיים.
הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:
$f_x(x,y)=4x+8y,\quad f_y(x,y)=8x+20y$ ₪ ליחידה.
מצא את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

12) לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות:
x מכונות לייצור שוקולד ו- y מכונות לייצור גלידה.
ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,
נתונה על ידי $f_x(x,y)=6x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}},\quad f_y(x,y)=3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$.

א. מצא את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצא כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.
הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

13) בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש ב- x טון סוכר ו- y טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x,y)=3x^2y^2,\quad f_y(x,y)=2x^3y$.
מחירי המוצרים הם 6,000 ₪ לטון סוכר ו- 4,000 ₪ לטון קקאו,
והתקציב לקניית המוצרים הוא 100,000 ₪.

א. מצא את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.
ב. מצא את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.
מהי התפוקה במקרה זה?
ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪ לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $f_x(x,y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 5.
ב. אם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $f(2,4)=2^3f(1,2)$,
אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1)=4 \quad h_y'(2,1)=8$

5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8)=0 \quad f(1,8)=9,$

6) $-\frac{3}{4}$

7) א. $\mathrm{B}(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.

8) א. 2 ב. $f_x(1,0.5)=\frac{54}{7}, \quad f_y(2,1)=\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}, \quad f_x(2,1)=\frac{108}{7},$

9) א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) $f(x,y)=2x^2+8xy+10y^2$

12) א. $f(x,y)=9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.

13) א. $f(x,y)=x^3y^2$
ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל- $f(10,10)=10^3 10^2=100000$ חפיסות שוקולד.
ג. התשובה לא תשתנה.

14) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.