

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 21 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

1. פונקציות הומוגניות..... 1
2. משפט אוילר..... 4

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

(4) נתון כי $z(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדוק האם הפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$ הומוגנית.

במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמט ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

(5) מצא עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות. כמו כן, מצא את סדר ההומוגניות עבור ה- α שמצאת.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + xy^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות :
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגם את הטענה על הפונקציות הבאות :

$$1. f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{x+y}$$

ב. הוכח את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא :

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$,

$$\text{המקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t)$$

7) תהינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאמה. קבע, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה :

א. $f \cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f + g$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, f_x(1, 2) = 10$$

$$\text{חשב את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3)$$

9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.

$$\text{ידוע כי } z \text{ פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי } f(4, 10) = 1$$

$$\text{א. חשב את } f(2, 5)$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4$$

$$\text{חשב את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a$$

תשובות סופיות

- (1) הומוגנית מסדר 3.5
- (2) הומוגנית מסדר -1
- (3) הומוגנית מסדר 1
- (4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
- $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)}$ הומוגנית מסדר -3
- $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר -2
- $f(x, y) = -4$ הומוגנית מסדר 0
- (5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.
- (6) א.1. $g(t) = 1 - t + 2t^2$ א.2. $g(t) = \sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
- (7) א. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$ ב. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$.
- ג. הומוגנית מדרגה $2r_1 - \frac{r_2}{n}$
- ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.
- (8) $f_x(2, 4) = 80$, $f_x(1.5, 3) = 33.75$, $f(2, 4) = 64$, $f(0.5, 1) = \frac{1}{4}$
- (9) א. $f(2, 5) = \frac{1}{16}$ ב. $f_x(a, a) = 4a^3$

משפט אוילר

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכח שהפונקציה הומוגנית ומצא את דרגתה.
 ב. הראה שמשפט אוילר מתקיים.

(2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכח כי $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$.

הוכח כי $x \cdot f_x = -y \cdot f_y$.

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

(4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2,

ונגדיר $h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכח כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון: $f(8, 1) = 16$, $h'_x(6, 3) = 9$.

מצא את: $h(2, 1)$ ואת $h'_y(2, 1)$.

(5) g ו- h הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x, y) = (x + y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכח כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4, 32) = 16$, $f'_y(1, 8) = 3$, $f'_x(2, 16) = 12$,

מצא את: $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$.

(6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים פונקציה $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$.

נתון: $p(1, 2) = \frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $f'_x(2, 4) = 64$,

חשב את: $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את ערך הסכום $f'_x(4, 8) + 2f'_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$,

על ידי $u(x, y) = (f(x, y))^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$.

הסבר זאת בקצרה.

2. הוכח כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$.

היעזר בסעיף הקודם ובנתונים על f .



8) תהי פונקציה הומוגנית מסדר m ,

$$f(2,1) = 27 \text{ ו- } f(6,3) = 243.$$

א. מצא את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עשׂיׂע של f .

מעבירים משיק לעשׂיׂע בנקודה הנ״ל.

$$\text{המשיק הוא } 2x + 3y = 7.$$

מצא את $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$, $f_x(1,0.5)$.

9) תהי פונקציה של משתנה אחד $g(t)$.

$$\text{על הפונקציה } g \text{ ידוע, כי } g'(8) = 2, g(1) = 3, g(4) = 5.$$

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) , כך: $t = \frac{4y}{x}$.

מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.

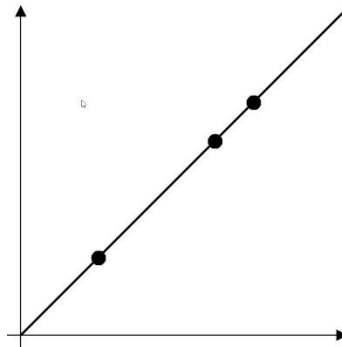
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת.

צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2) = -16$.



10) נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכח כי } x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0.$$

11 הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$,

אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2, 1) = 4$ $h'_y(2, 1) = 8$

(5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1, 8) = 0$, $f(1, 8) = 9$.

(6) $-\frac{3}{4}$

(7) א. $B(4, 8)$ ב. 12 ג. שאלת הוכחה והסבר.

(8) א. 2 ב. $f_x(1, 0.5) = \frac{54}{7}$, $f_y(2, 1) = -\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2, 1) = \frac{108}{7}$,

(9) א. 5 ב-ד. שאלות הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.