חדוא 2 מ

פרק 8 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצא את y', כאשר $x^2+y^5=xy+1$,
וחשב את $y'(0)$.

2) מצא את $y'(1)$, כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$.

3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x+\ln y=1$.

4) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
חשב את $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0),\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

5) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$.
חשב את $y_z(0,0),\ y_x(0,0)$.

6) נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$.
הוכח כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$.

7) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
מצא $z_{xx}(1,1)$.

8) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצא:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

9) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשב את u_x, v_x, u_y, v_y.

ב. הראה כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

10) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשב את $w_x,\ w_y$.

ב. חשב $y_x,\ y_w$.

11) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכח כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכח כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$ $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1}, u_y=\frac{4v+2}{8uv-1}, v_x=\frac{3-2u}{8uv-1}, v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)\ (u\neq v)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}\ (u\neq\pm v)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5+y^3+y=x^2-1$.

א. הוכח שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ב. חשב את $f'(2)$.

ג. בדוק האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2+y+e^y=17$.

א. הוכח שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$.

ב. בדוק האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x=4$.

ג. הוכח ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השווה בין התוצאות של סעיף ג׳ ושל סעיף ד׳.

3) נתונה המשוואה $y^3-x^3-3y^2+6x^2+3y-12x+7=0$.

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם תשובתך בסעיף ב׳ עומדת בסתירה לתשובתך בסעיף א׳?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדר פונקציה $F(x,y)$ מתאימה, ובדוק האם קיימת נקודה (x_0,y_0), כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדוק בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2+y^2+4=0$

ב. $xy-40x=100$

ג. $x^2-y^2=3$

5) נתונה המשוואה $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

א. מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשב את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכל לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

א. מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשב את y'' עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$.

א. מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבע האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y = f(x)$. עשה זאת בשתי דרכים:

1. על ידי תיאור גרפי של העקום.
2. על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $ax^4 + y^4 - xy = 0$, כאשר a קבוע ממשי.

ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

א. מצא את x_0 ואת הקבוע a.

ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצא אותן.

ג. השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ד. הוכח, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x.

9) נתונה המשוואה $xy=\ln y-\ln x+1$.

א. מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשב את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכל לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבע האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x+\ln y=y-1$.

א. בדוק האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e,e).

ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x=e$?

ג. האם תשובתך בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובתך בסעיף א'?

ד. מצא את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.

ה. חשב את הנגזרת בנקודות הנ"ל.

ו. השתמש בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ז. חזור על סעיף ו', רק הפעם תן הוכחה ללא איור.

11) נתונה המשוואה $y^3+6x\sin y=-8$, ונתונה נקודה $(0,-2)$.

א. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$ בסביבת הנקודה.

ב. פתח את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x=g(y)$.

ב. נתונה המשוואה $x=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

הוכח כי קיימת סביבה של הנקודה $(0,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x=g(y)$.

ג. חשב את $g'(1)$.

13) נתונה המשוואה $xy=\ln y-\ln x+1$.

א. הראה כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x=g(y)$.

ב. הוכח שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y-yz^2-4xz=7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z=z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y=y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכח שהפונקציה $y=y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $x^3-y^3-z^3-3x^2y+3xy^2+3z^2=3z-1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z=z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z=z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכח, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה $z=z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$.

מצא נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x,z)$, ומצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x=u+v,\quad 2)\ y=u^2+v^2,\quad 3)\ w=u^3+v^3$$

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w=w(x,y)$, בנקודה $(x,y,u,v,w)=(1,1,0,1,1)$.

במידה שכן, חשב בנקודה את w_x, w_y.

ב. חזור על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w)=(2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w)=(2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $w=w(x,y)$?

במידה שכן, חשב בנקודה את w_x, w_y.

ד. מצא את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה עבור $w=w(x,y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות:

$1)\ x = a\cos\phi\cos\theta,\quad 2)\ y = b\sin\phi\cos\theta,\quad 3)\ z = c\sin\theta\quad (a,b,c>0)$

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi=\phi(x,y)$,
בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0=\theta_0=\frac{\pi}{6}$.
במידה שכן, חשב בנקודה את ϕ_x,ϕ_y.
בדוק תשובתך על ידי חישוב ישיר.

ב. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z=z(\phi,x)$,
בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0=\theta_0=\frac{\pi}{6}$.
במידה שכן, חשב בנקודה את z_ϕ, z_x.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$ ג. כן. ד. הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

4) א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1,140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה $(2,1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.

5) א. כל נקודה (x,y) שעל המשוואה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ (2,2)$.
ב. $y'=-\frac{2x^2-2y}{y^2-2x}$ ג. כלום! ד. לא.

6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ \left(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a\right)$.
ב. $$y''=-\frac{\left[2x-a\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)\right](y^2-ax)-\left[2y\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)-a\right](x^2-ay)}{\left(y^2-ax\right)^2}$$

7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0),\ (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.

8) א. $x_0=\frac{1}{2},\ a=3$ ב. כן, $(0,0),(-0.5,-0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.

9) א. כל נקודה (x,y) שעל $xy=\ln y-\ln x+1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
ב. $y'=-\frac{y+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד+ה. לא קיימת.

10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא.
ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
ה. $y'(x)=\frac{(2-e)y}{x(1-y)}\ \ \left(x>0,y>0,(x,y)\neq(1,1)\right)$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x)=-2+\frac{1}{2}\sin 2\cdot x+\frac{1}{8}\sin 2(\sin 2-2\cos 2)x^2$

12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1)=-2$

13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.

15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.

16) הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_z(0,0,0.5\pi)=0\ ,\ y_x(0,0,0.5\pi)=-1$

17) א. $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1)=0\ ,\ \frac{\partial w}{\partial y}(1,1)=\frac{3}{2}$ ב. לא מתקיימים.
ג. $w_y(2,2)=3\ ,\ w_x(2,2)=-3$ ד. $D=\left\{(x,y)\in R^2\mid y>\frac{1}{2}x^2\right\}$

18) א. $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{b}\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{b}{a\sqrt{3}}$ ב. $\frac{\partial z}{\partial\phi}=-c\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2c}{a}$

שימושים גאומטריים

שאלות

1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ $(z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x=-2,\ y=1$.

2) מצא משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

3) מצא מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$,
המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

4) למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x,y,z בנקודות A,B,C, בהתאמה.
נסמן: $O=(0,0,0)$.
הוכח $OA+OB+OC=a$.
(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

5) נתון המשטח $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$, ונתונה הנקודה $(1,2,-1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x+3y-2z=10$,
בנקודה Q.
מצא את הנקודה Q.

6) הראה שהמשטח $x^2-2yz+y^3=4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$, בנקודת החיתוך $(1,-1,2)$.

7) מצא משוואת הישר המשיק לעקום $C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=\frac{1}{4}\pi$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$,

ונתונה נקודה $\mathrm{P}\left(x_0,y_0,z_0\right)$, המתקבלת מהצבת $t=t_0$ במשוואת העקום.

הוכח כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

ב. מצא את משוואת המישור הנורמל לעקום

$C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,

בנקודה בה $t=0.25\pi$.

9) נתונות שתי העקומות:

$$C_1: x=2t+1 \quad y=t^2-1 \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2 \quad y=-s \quad z=s-1$$

נתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S, וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצא את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

10) נתונות שלוש עקומות:

$$C_1: x=2t+1, \quad y=t^2-1, \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2, \quad y=-s, \quad z=s-1$$
$$C_3: x=u+2, \quad y=u, \quad z=u^2-1$$

נתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S, וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S? נמק!

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שמשוואת הישר המשיק לעקום: $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $\ell:\ \mathrm{P}+t\cdot\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצא את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases}2xz-x^2y=3\\3x^2y+y^2z=-2\end{cases}$$

12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,

כאשר $(a,b,c)=\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצא את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, על ידי $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2+v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u,v)=(1,0)$.

14) מצא ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u$,

עבור $u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

1) $3x-6y+2z+18=0$
2) $x-y+z+6=0$, $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$
3) $x+8y+18z=21$, $x+8y+18z=-21$
4) שאלת הוכחה.
5) $Q(7,-9,-15)$
6) שאלת הוכחה.
7) $\ell:\ (x,y,z)=\left(3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)+s\left(3\sqrt{2},-6\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)$
8) א. שאלת הוכחה. ב. $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$
9) א. $P(1,-1,0)$ ב. $x-2z=1$
10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1,-1,0)$. ב. לא.
11) א. שאלת הוכחה. ב. $(x,y,z)=(1,-1,1)+t(3,16,2)$
12) א. שאלת הוכחה. ב. $3x+16y+2z=-11$
13) כל נקודה, למעט $(0,0,0)$. $-2x+z=-1$
14) $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1, שנוסחתו: $x^2+y^2+z^2=1$.