

קורס השלמה במתמטיקה

פרק 48 - פונקציות סתומות

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני..... 1
2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי..... 4

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצא את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשב את $y'(0)$.
- (2) מצא את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$ הוכח כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.
- (7) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$ מצא $z_{xx}(1,1)$.
- (8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצא:
- א. $z_{xx}(2,1)$
 ב. $z_{xy}(2,1)$
 ג. $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראה כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשב את w_x, w_y .

ב. חשב y_x, y_w .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכח כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכח כי:

$$א. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$ב. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \quad (11)$$

שאלת הוכחה. (11)

שאלת הוכחה. (12)

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

- א. הוכח שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- ב. חשב את $f'(2)$.
- ג. בדוק האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.
- ד. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

(2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

- א. הוכח שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$.
- ב. בדוק האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x = 4$.
- ג. הוכח ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.
- ד. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.
- ה. השווה בין התוצאות של סעיף ג' ושל סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

- א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.
- ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?
- ג. האם תשובתך בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובתך בסעיף א'?

- (4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדר פונקציה $F(x, y)$ מתאימה, ובדוק האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדוק בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

- (5) נתונה המשוואה $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$.
- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשב את y' עבור נקודות אלה.
 - מה תוכל לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
 - השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- (6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).
- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשב את y'' עבור נקודות אלה.
- (7) נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$.
- מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבע האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשואה מתארת פונקציה $y = f(x)$. עשה זאת בשתי דרכים:
 - על ידי תיאור גרפי של העקום.
 - על ידי חישוב.
- (8) נתונה המשוואה $ax^4 + y^4 - xy = 0$, כאשר a קבוע ממשי.
- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
- מצא את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצא אותן.
 - השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכח, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x .

9 נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- א. מצא את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- ב. חשב את y' עבור נקודות אלה.
- ג. מה תוכל לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- ד. השתמש בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבע, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבע האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10 נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$.

- א. בדוק האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?
- ג. האם תשובתך בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובתך בסעיף א'?
- ד. מצא את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- ה. חשב את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- ו. השתמש בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- ז. חזור על סעיף ו', רק הפעם תן הוכחה ללא איור.

11 נתונה המשוואה $y^3 + 6x \sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0, -2)$.

- א. הוכח שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.
- ב. פתח את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

12 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נסח את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.
- ב. נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$. הוכח כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y , $x = g(y)$. חשב את $g'(1)$.

13 נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראה כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $x = g(y)$.

ב. הוכח שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14 בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x, z)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ג. הוכח שהפונקציה $y = y(x, z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1, 2)$.

15 נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1, 2, 0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$?

ג. הוכח, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

$z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$.

16 נתונה המשוואה $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$.

מצא נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x, z)$,

ומצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17 נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x, y)$,

בנקודה $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$.

במידה שכן, חשב בנקודה את w_x, w_y .

ב. חזור על סעיף א', עבור הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$, שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x, y)$?

במידה שכן, חשב בנקודה את w_x, w_y .

ד. מצא את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור $w = w(x, y)$.

(18) נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשב בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדוק תשובתך על ידי חישוב ישיר.

ב. בדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשב בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

(1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

(3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

- 4 א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- 5 א. כל נקודה (x, y) שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות $(0,0)$, $(2,2)$.
ב. $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ ג. כלום! ד. לא.
- 6 א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות $(0,0)$, $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$.
ב. $y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$
- 7 א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0)$, $(-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- 8 א. $x_0 = \frac{1}{2}$, $a = 3$ ב. כן, $(0,0)$, $(-0.5, -0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- 9 א. כל נקודה (x, y) שעל $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
ב. $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד. לא קיימת.
- 10 א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
ה. $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ ($x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1)$)
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- 11 א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$.
12 א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1) = -2$.
- 13 א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- 14 א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- 15 א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- 16 הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_x(0,0,0.5\pi) = -1$, $y_z(0,0,0.5\pi) = 0$.
- 17 א. $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}$, $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0$ ב. לא מתקיימים.
- ג. $w_x(2,2) = -3$, $w_y(2,2) = 3$ ד. $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\}$
- 18 א. $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}$ ב. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}$, $\frac{\partial z}{\partial \phi} = -c\frac{\sqrt{3}}{2}$