

מבוא לשיטות כמותיות בניהול

פרק 30 - פונקציות של שני משתנים - קיצון תחת אילוץ (כופלי לגראנז)

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז).....1

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\max \{xy\} \quad s.t. \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\max \{2x + y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

כאשר $x, y \geq 0$.

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \quad (7)$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מיושליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.} \quad (9)$$

$$\text{התועלת מצריכת הסל, } (x, y), \text{ נתונה על ידי } u(x, y) = \ln x + \ln y.$$

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מיושליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסח ופתור את בעיית מיושליה.

- 10** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסח ופתור את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסח ופתור את הבעיה.
- 12** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \mathbf{(1)}$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad \mathbf{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \mathbf{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \mathbf{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \mathbf{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \mathbf{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \mathbf{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \mathbf{(8)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \mathbf{(9)}$$

$$\max(6, 2) \quad \mathbf{(10)}$$

$$\max(2, 3) \quad \mathbf{(11)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \mathbf{(12)}$$