שדות אלקטרומגנטיים

פרק 7 - פתרון שדות קווזיסטטים ע"י טור קרובים עוקבים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

שאלות:

1) שני לוחות ומקור זרם

נתון התקן העשוי משני לוחות מוליכים אידיאליים בגודל $a\times b$ ומרחק d ביניהם.

בצד אחד של הלוחות ישנו מקור זרם המספק זרם: $I(t)=I_0\sin(\omega t)$.

בצד השני הלוחות מחוברים על יד דופן בעלת תכונות השראתיות כך שעל הדופן מתקיים: $V(t)=L\frac{dk_y}{dt}$. נתון כי על פני המקור אין תיקונים לזרם מסדר גבוה.

כמו כן: $b>>a>>d$ וניתן להניח שהשדות מחוץ להתקן מתאפסים.

א. חשב את השדות מסדר אפס בתוך ההתקן.

ב. חשב את התיקונים מסדר ראשון לשדות.

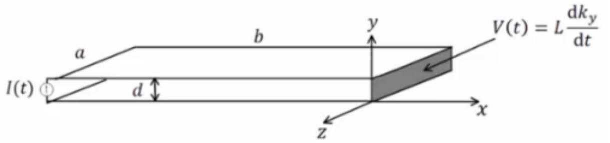
ג. מהי צפיפות המטען המשטחית על פני הלוח התחתון?

ד. חשב את התיקון מסדר שני לצפיפות הזרם המשטחית בלוח התחתון.

ה. השווה את $k^{(2)}$ ל- $k^{(0)}$ ותן תנאי לנכונות הקירוב הקוויזיסטטי (ניתן להניח: $\frac{L}{\mu_0 d}>>b$).

ו. חשב את הווקטור פויינטינג בהתקן עד סדר ראשון.

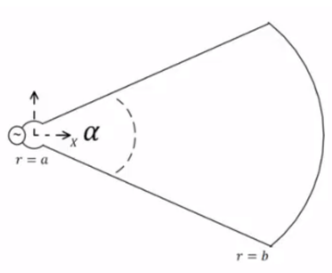
ז. הראה כי משפט פויינטינג בצורתו הדיפרנציאלית מתקיים בתוך ההתקן עד סדר ראשון.



2) גיזרה גלילית

מקור זרם $I(t)$ מחובר למבנה שחתכו מתואר באיור. המבנה מורכב משני לוחות מוליכים ב- $\theta=\pm\frac{\alpha}{2}$, $a<r<b$, וחלק מקליפה גלילית מוליכה ב- $-\frac{\alpha}{2}\le\theta\le\frac{\alpha}{2}$, $r=b$.

הרדיוס הפנימי a הינו קטן מאוד. עומק המבנה בציר z הוא l כך ש- $l>>b$ ולכן ניתן להזניח את התלות של השדה ב- z. הנח שהשדות מחוץ למבנה מתאפסים.



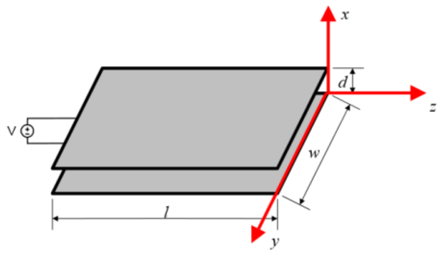
א. חשב את: $\vec{H}^{(0)}(r,\theta,t)$.

ב. חשב את ההשראות ומתח ההדקים של המבנה.

ג. חשב את: $\vec{E}^{(1)}(r,\theta,t)$, הנח E בכיוון $\hat{\theta}$ בלבד.

ד. חשב את מתח ההדקים מתוך ערכו של E ב- $r=a$ והראה כי התוצאה זהה למה שקיבלת בסעיף ב'.

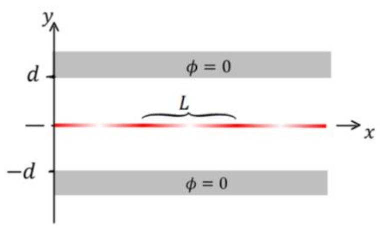
3) התכנסות למשוואת מקסוול

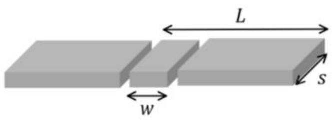


נתונים שני לוחות מקבילים במרחק d זה מזה.
אורך הלוחות הוא l ורוחבם w כאשר $d << l\,, w$.
בין הלוחות בנקודה $z = -l$, מחובר מקור מתח,
התנהגות המקור ב- $z = 0$ היא: $V(t) = A\cos(\omega t)$
ללא תיקונים מסדר גבוה.
פתור את הסעיפים הבאים בקירוב הקוואזיסטטי.

א. מצא את $\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}$.
ב. מצא את $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$.
ג. מצא את הזרם הכולל I והמתח בנקודה $z = -l$.
הוכח כי בסדר ראשון ההתקן מתנהג כקבל לוחות ומצא את הקיבול.
ד. מצא את $\vec{E}^{(2)}, \vec{H}^{(2)}$.
ה. מצא את הזרם הכולל I והמתח בנקודה $z = -l$.
מהו מעגל התמורה של ההתקן בסדר שני?
ו. מצא את $\vec{E}^{(3)}, \vec{H}^{(3)}$.
ז. הסק באינדוקציה מהו הפתרון מסדר n כלשהו.
ח. הראה שהפתרון מתכנס לפתרון משוואות מקסוול המלאות.

4) קרן אלקטרונים משטחית בין שני מוליכים





קרן משטחית של אלקטרונים נמצאת על
מישור xz ונעה בכיוון ציר x במהירות v.
צפיפות המטען של האלקטרונים בקרן
היא: $\eta(x) = \eta_0 + \eta_1 \cos\left(\frac{2\pi}{L}(x - vt)\right)$.
הקרן עוברת בין שני מוליכים הנמצאים בגובה $\pm d$.
בהנחה ש- $v << c$ ניתן להשתמש בקירוב
הקוואזיסטטי "ולהקפיא את הבעיה" כלומר להתייחס
לזמן כפרמטר קבוע בחישוב השדות.

א. מצא את הפוטנציאל בין המוליכים על ידי פתרון משוואת לפלאס מתחת ומעל הקרן.
ב. מצא את השדה החשמלי בין המוליכים.
ג. מבודדים מהלוח העליון חתיכה ברוחב L, מתוך החתיכה חותכים חתיכה נוספת ברוחב w. מחברים בין שתי החתיכות באמצעות נגד R שהתנגדותו נמוכה מאוד (ניתן להניח שהפוטנציאל בשתי החתיכות עדיין אפס) מצא את המטען הכולל בחתיכה ברוחב w וההספק שהולך לאיבוד לחום בנגד.
הנח עומק החתיכה הוא s וכי $w << L$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{H}^{(0)}=-k\hat{z}=-\frac{I}{a}\hat{z}\ ,\ \vec{E}^{(0)}=0$. ב. $E_y^{(1)}=\mu_0\frac{\dot{I}}{a}\left(x+\frac{L}{\mu_0 d}\right)\ ,\ \mathrm{H}^{(1)}=0$.

ג. $\eta^{(1)}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\dot{I}}{a}\left(x+\frac{L}{\mu_0 d}\right)$. ד. $K_x^{(2)}=-\frac{\varepsilon_0\mu_0\ddot{I}}{a}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{Lx}{\mu_0 d}+\frac{Lb}{\mu_0 d}-\frac{b^2}{2}\right)$.

ה. $\lambda>>\frac{L}{\mu_0 d}$. ו. $\vec{S}=\frac{\mu_0\dot{I}I}{Q^2}\left(x+\frac{L}{\mu_0 d}\right)(-\hat{x})$

ז. הוכחה.

2) א. $\vec{H}^{(0)}=-\frac{I}{l}\hat{z}$. ב. $L=\frac{\mu_0\alpha\left(b^2-a^2\right)}{2l}$.

ג. $E_\theta=\frac{\mu_0\dot{I}}{2l}\left(r-\frac{b^2}{r}\right)$. ד. $V=\frac{\mu_0\dot{I}}{2l}\left(b^2-a^2\right)\alpha$.

3) א. $\vec{E}^{(0)}=-\frac{V}{d}\hat{x}\ ,\ \vec{H}^{(0)}=0$. ב. $\vec{E}^1=0\ ,\ \vec{H}_y^{(1)}=\frac{\varepsilon_0\dot{V}}{d}z\ ,\ Kz=-\frac{\varepsilon_0\dot{V}}{d}z$.

ג. $I=\frac{\varepsilon_0 lw}{d}\dot{V}\ ,\ \mathrm{C}=\frac{\varepsilon_0 lw}{d}$. ד. $E_x^{(2)}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\ddot{v}}{2d}z^2\ ,\ H^{(2)}=0$.

ה. $V^2=\frac{\mu_0 ld}{2w}\ddot{I}\ ,\ I^2=0$. ו. $E^{(3)}=0\ ,\ H_y^{(3)}=-\varepsilon_0^2\mu_0\frac{\dddot{V}}{2d}\frac{z^3}{3}$

ז. ראה סרטון. ח. הוכחה.

4) א. $\phi_1=\frac{\eta_0}{2\varepsilon_0}(d+y)+\frac{\eta_1}{2k\varepsilon_0\cosh(kd)}\cos\left(k(x+\varphi)\right)\sinh\left(k(y+d)\right)$,

$\phi_2=\frac{\eta_0}{2\varepsilon_0}(d-y)-\frac{\eta_1}{2k\varepsilon_0\cosh(kd)}\cos\left(k(x+\varphi)\right)\sinh\left(k(y-d)\right)$,

כאשר $\varphi=-Vt$, $k=\frac{2\pi}{L}$.

ב. $$\vec{E}_2=\frac{\eta_1}{2k\varepsilon_0\cosh(kd)}\cos\left(k(x+\varphi)\right)\sinh\left(k(y-d)\right)\hat{x}+\left(\frac{\eta_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\eta_1}{2\varepsilon_0\cosh(kd)}\cos\left(k(x+\varphi)\right)\cosh\left(k(y-d)\right)\right)\hat{y}\ ,$$

$$\vec{E}_1=\frac{-\eta_1}{2k\varepsilon_0\cosh(kd)}\cos\left(k(x+\varphi)\right)\sinh\left(k(y+d)\right)\hat{x}+\left(\frac{-\eta_0}{2\varepsilon_0}-\frac{\eta_1}{2\varepsilon_0\cosh(kd)}\cos\left(k(x+\varphi)\right)\cosh\left(k(y+d)\right)\right)\hat{y}.$$

ג. $\bar{p}=\frac{1}{2}I_0^2R$, $q\approx-5\left(\frac{\eta_0\omega}{2}+\frac{\eta_1\omega\cos k\varphi}{2\cosh(kd)}\right)$ כאשר $I_0=\frac{5\omega kv\eta_1}{2\cosh(kd)}$.