פיזיקה 1 מכניקה

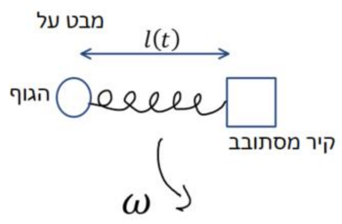
פרק 6 - קואורדינטות פולריות

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

שאלות:

1) מסה קשורה עם קפיץ לקיר מסתובב



גוף נקודתי מחובר ע"י קפיץ לקיר שמסתובב במהירות זוויתית קבועה ω במישור האופקי. אורך הקפיץ משתנה בזמן ונתון לפי: $l(t)=l_0+A\sin(\Omega t)$ כאשר A , Ω ו- l_0 הם קבועים חיוביים ומתקיים $A<l_0$.

א. מהי תאוצת הגוף בקואורדינטות פולריות?

ב. נניח ש- A , Ω ו- ω ידועים, מהו התנאי על l_0 כך שבנקודות זמן מסוימות כיוון התאוצה יהיה רק בכיוון $\hat{\theta}$?

ג. מהי התשובה המספרית לסעיף ב' אם: $\Omega=3\frac{\text{rad}}{\sec}$, $A=0.2\text{m}$, $\omega=1\frac{\text{rad}}{\sec}$?

2) דני מסתובב במעגלים

דני בן השלוש מתחיל לרוץ במעגלים ממנוחה.
דני מתרחק מהנקודה בה התחיל לרוץ לפי: $r=At^2$ והוא מסתובב במהירות זוויתית הולכת וגדלה: $\omega=Bt$. $\left(A=0.4167\frac{\text{m}}{\sec^2},B=1\frac{\text{rad}}{\sec^2}\right)$.

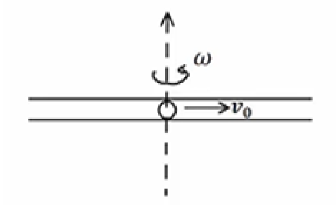
א. מצא את המהירות של דני כתלות בזמן בקואורדינטות פולריות.

ב. מצא את התאוצה של דני כתלות בזמן בקואורדינטות פולריות.

ג. כאשר דני מגיע לתאוצה השווה ל- g הוא מקבל סחרחורת ונופל (על הטוסיק כמובן), מתי ייפול דני?

3) כוח מסתורי בצינור

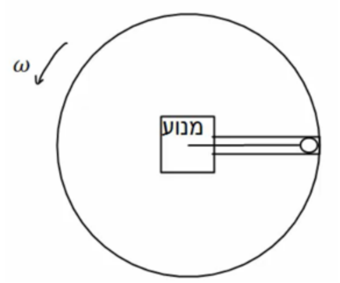
צינור מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω סביב מרכזו.
כדור קטן בעל מסה m נמצא ב- $t=0$ במרכז הצינור.
לכדור מהירות התחלתית v_0 בכיוון הרדיאלי.
כוח מסתורי F (לא בהכרח קבוע) פועל על הכדור ושומר על מהירות הכדור ביחס לצינור להיות קבועה ושווה ל- v_0 . בין הצינור לכדור אין חיכוך.



א. מה מיקום הכדור כתלות בזמן?

ב. מהו הכוח F כתלות בזמן הפועל על הכדור?

4) מנוע מושך כדור בתוך דיסקה מסתובבת



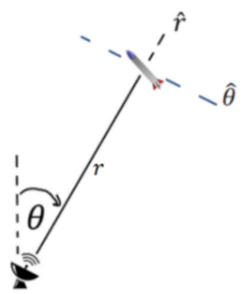
דיסקה ברדיוס R מונחת על שולחן ומקובעת במרכזה אך מסתובבת סביב מרכזה במהירות זוויתית קבועה ω.
בתוך הדיסקה ישנה תעלה, כדור בעל מסה m מונח בקצה של התעלה ויכול לזוז רק בתוך התעלה.
במרכז הדיסקה נמצא מנוע המחובר בחוט לכדור.
המנוע מושך את הכדור למרכז הדיסקה כך שתאוצת הכדור ביחס לדיסקה היא a_0.

א. מצא את מיקום המסה כתלות בזמן ביחס לדיסקה וביחס למעבדה, בקואורדינטות פולריות.

ב. מה הכוח שמפעיל המנוע על הכדור כתלות בזמן?

ג. מה הכוח שמפעילים הקירות על הכדור?

5) מכ"מ מזהה טיל



מכ״מ מזהה טיל הנמצא מעט מעל האטמוספירה עם מנוע כבוי.
הבעיה דו מימדית.

נתון כי: $\dot{\theta}=1.5\cdot10^{-2}\,\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\dot{r}=1100\,\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$, $\theta=30^\circ$, $r=70\text{km}$.

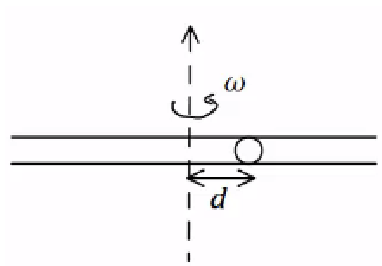
החיכוך עם האוויר זניח בגובה רב והתאוצה היחידה היא תאוצת הכובד השווה ל- $\dfrac{9.6^{\text{m}}}{\text{sec}^2}$ (התאוצה קטנה מעט בגלל המרחק ממרכז כדור הארץ).

א. מהו גודלה של מהירות הטיל?

ב. מצאו את הערך של $\ddot{r}$ ושל $\ddot{\theta}$.

6) כדור חופשי בתוך צינור מסתובב

צינור מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω סביב מרכזו.
כדור קטן בעל מסה m נמצא בתוך הצינור.
ב- $t=0$ הכדור נמצא במנוחה ביחס לצינור ובמרחק d ממרכז הצינור.
בין הצינור לכדור אין חיכוך.



א. רשום את הכוחות הפועלים על הכדור בצירים פולריים.

ב. רשום את משוואת התנועה בכיוון הרדיאלי.

ג. בדוק כי הפתרון: $r(t)=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$ מתאים למשוואה שמצאת ומצא את הקבועים A , B.

ד. מהו הכוח הנורמאלי הפועל מהצינור על כדור?

7) משוואות לתנועת חלקיק

תנועת חלקיק מתוארת ע"י המשוואות: $r=\mathrm{A}\cdot t^{\alpha}$ ו- $\dot{\theta}=\omega=const$
כאשר α, A קבועים.

א. הביעו את r כתלות ב- θ.

ב. שרטטו את התנועה עבור: $\alpha>0$, $\alpha<0$, $\alpha=0$.

ג. הניחו כי הגוף מתחיל מהראשית וכי: $\alpha=1$, $\mathrm{A}=4\frac{\mathrm{m}}{\sec}$, $\omega=2\frac{\mathrm{rad}}{\sec}$.
כמה סיבובים יעבור הגוף עד שהרדיוס יהיה 30_{m}?

8) חללית במסלול ספיראלי

חללית 1 נעה במסלול ספיראלי (בדו מימד) כך ש- $r_1(t)=\mathrm{A}t^{\alpha}$, כאשר A ו- α הם קבועים חיוביים נתונים.

נתון גם כי: $\ddot{\vec{r}}(t)\cdot\hat{r}=\mathrm{A}\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}-\mathrm{AC}^2t^{\alpha}e^{2\mathrm{C}t}$.

החללית נעה נגד כיוון השעון ו- C הוא גם קבוע חיובי נתון.
בזמן $t=0$ החללית חוצה את ציר ה- x השלילי.

א. מצאו את מיקום החללית בקואורדינטות קרטזיות.

ב. חללית 2 נעה על מסלול ספיראלי כך ש- $r_2(t)=\frac{1}{2}r_1(t)$ ובאותה זווית כמו חללית 1.
מצאו את המיקום, המהירות והתאוצה של חללית 1 ביחס לחללית 2.

ג. תארו באופן מילולי את תנועתה של חללית 1 ביחס לחללית 2 אם $\alpha=2$.

9) עכביש הולך על דיסקה מסתובבת

עכביש נמצא במרכזה של דיסקה המסתובבת במהירות זוויתית $0.2\frac{\mathrm{rad}}{\sec}$.
העכביש מתחיל לנוע במהירות קבועה ובקו ישר ביחס לדיסקה עד לקצה הדיסקה ברדיוס $2\mathrm{m}$. הזמן שלוקח לעכביש להגיע לקצה הוא 4 שניות.

א. מצאו את וקטורי מהירותו ותאוצתו של העכביש (ביחס למעבדה).

ב. הסבירו מדוע יש לעכביש תאוצה אם הוא הולך במהירות קבועה ביחס לקרוסלה.

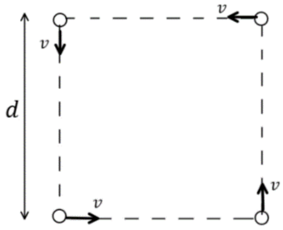
ג. הסבירו באופן איכותי את כל אחד מהרכיבים של תאוצת העכביש.

10) מהירות מינימאלית ללווין

לווין שעובר בסמוך לפני כדה"א מרגיש תאוצה $\vec{a}=-g\hat{r}$ (בהזנחת התנגדות האוויר).
מצאו מה צריכה להיות המהירות המינימלית של הלווין כך שלא יתנגש בפני כדה"א וישלים סיבוב.

11) משחק תופסת*

ארבעה ילדים משחקים תופסת, הם מתחילים לרוץ מארבע פינות של ריבוע בגודל $d \times d$. כל ילד רץ במהירות קבועה v לעבר הילד שמשמאלו (הכיוון הוא תמיד לכיוון הילד שמשמאלו).



א. תאר את תנועת הילדים וקבע היכן ייפגשו.

ב. כעבור כמה זמן ייפגשו?

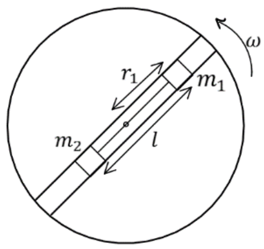
ג. כמה סיבובים עשה כל ילד עד למחצית מהזמן שנפגשו?

ד. מצא את וקטור המיקום של הילד המתחיל ברביע הראשון כפונקציה של הזמן בקואורדינטות קרטזיות.

רמזים: מהי הסימטריה בבעיה? איזה צורה יוצרים הילדים בכל רגע? רשום את המהירות של כל ילד בקואורדינטות פולריות.

12) שתי מסות מחוברות בחוט בתוך דסקה מסתובבת*

על דסקה המסתובבת במהירות זוויתית קבועה ω ישנה מסילה העוברת דרך מרכז הדסקה. במסילה ישנן שתי מסות m_2 , m_1 המחוברות בחוט באורך l.
המערכת מונחת על שולחן אופקי (ז"א כיוון כוח הכובד לתוך הדף).



א. מצא את היחס בין המסות על מנת שרדיוס כל מסה יישאר קבוע במהלך התנועה.

כעת חותכים את החוט.
נסמן את הזמן שבו חותכים את החוט ב-$t=0$.

ב. רשום משוואה דיפרנציאלית שפתרונה ייתן את $r_1(t)$.

ג. פתור את המשוואה ומצא את $r_1(t)$.

הנח כי r_1 הוא מיקום המסה ברגע השחרור.

13) רוכב אופנוע*

רוכב אופנוע מתחיל את תנועתו ממנוחה.
מרחקו מנקודת ההתחלה משתנה לפי $r=Ct$, כאשר C קבוע.
בנוסף הרוכב מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω.
מצא את המרחק המקסימלי אליו יגיע הרוכב אם נתון מקדם החיכוך הסטטי μ_s.

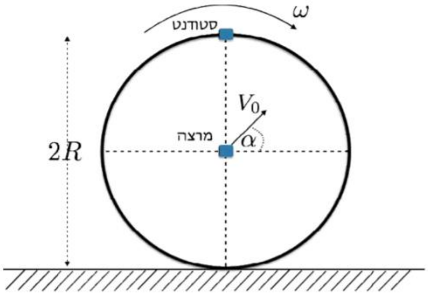
14) סטודנט ומרצה על גלגל ענק*

סטודנט נמרץ פוגש מרצה בעת ביקורו בפארק שעשועים.
הסטודנט נחוש בדעתו להראות שהוא יודע מכניקה ומשכנע את המרצה לטפס למרכז גלגל ענק. הסטודנט עולה על הקרון של הגלגל. הגלגל מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω עם כיוון השעון ורדיוסו R. כשהסטודנט מגיע לשיא הגובה המרצה זורק כרית במהירות התחלתית v_0 ובזווית α ביחס לאופק.
בזמן מסוים לאחר זריקת הכרית הסטודנט קופץ מהקרון כך שמהירותו היא המהירות המשיקית של הקרון ביחס למרצה. הסיכוי היחידי של הסטודנט לא להיפצע בעת הפגיעה בקרקע הוא אך ורק אם ינחת על הכרית.
הנח שתנועת הכרית היא כתנועת אבן.
לפני הזינוק של הסטודנט:

א. רשמו את ווקטור המיקום של הכרית בקואורדינטות קרטזיות ביחס למרצה.
ב. רשמו את ווקטור המיקום של הכרית בקואורדינטות פולריות ביחס למרצה.
ג. רשמו את ווקטור המיקום של הסטודנט בקואורדינטות קרטזיות ביחס למרצה.
ד. רשמו את ווקטור המיקום של הסטודנט בקואורדינטות פולריות ביחס למרצה.
ה. רשמו את ווקטור המיקום של הכרית בקואורדינטות קרטזיות ביחס לסטודנט.
ו. מה צריכה להיות גודלה של המהירות ההתחלתית v_0 והזווית α כדי שהכרית תעבור ליד הסטודנט לאחר זמן t_0.

הסטודנט מחליט לקפוץ כשהכרית עוברת לידו (אסור לו לתפוס אותה כשהיא לידו).

ז. הכרית יכולה לעבור ליד הסטודנט כשהיא לפני שיא הגובה, בשיא הגובה או אחריו. באיזה משלושת המקרים על הסטודנט לקפוץ על מנת לחסוך את הוצאות החיוב של האמבולנס? (נמקו את תשובתכם).
ח. על פי הסעיף בהינתן שהסטודנט והכרית בקרקע באותו הזמן.
מה הוא הקשר בין ווקטורי המהירויות של הסטודנט והכרית בעת הקפיצה כך שהסטודנט לא יפגע?
ט. חשבו את הגובה בו תתרחש הקפיצה.
בטאו את הגובה הנ"ל בעזרת קבועי הבעיה בלבד
(t_0 הוא לא קבוע בעיה עבור שאלה זו).



15) קרוסלה**

חיפושית נעה על קרוסלה המסתובבת במהירות זוויתית קבועה ω_0.

רדיוס הקרוסלה R. החיפושית נעה מקצה הקרוסלה למרכזה במהירות קבועה v_0 ביחס לקרוסלה.

א. מצא את מיקום החיפושית בקורדינטות קרטזיות ובקורדינטות פולריות ביחס לצופים הבאים:

i. צופה A- הנמצא על הקרוסלה בנקודת ההתחלה של החיפושית.

ii. צופה B - הנמצא על הקרוסלה במרכזה.

iii. צופה C - הנמצא במרכז הקרוסלה אך אינו מסתובב איתה.

iv. צופה D - הנמצא בקצה הקרוסלה ואינו מסתובב עם הקרוסלה.

ב. מצא את המהירות והתאוצה ביחס לאותם צופים.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{a}=-\left(\left(\Omega^2+\omega^2\right)A\sin\Omega t+\omega^2 l_0\right)\hat{r}+\left(2\Omega A\cos\Omega t\right)\hat{\theta}$

ב. $\theta<l_0\le\frac{\Omega^2+\omega^2}{\omega^2}\cdot A$ ג. $\theta<l_0\le 2m$

2) א. $\vec{r}=2At\hat{r}+At^2\cdot Bt\hat{\theta}$ ב. $\vec{a}=\left(2A-B^2At^4\right)\hat{r}+\left(5ABt^2\right)\hat{\theta}$

ג. $t=2\sec$

3) א. $r=v_0\cdot t\ ,\ \theta(t)=\omega\cdot t$ ב. $F_r=m\left(0-\omega^2 v_0 t\right)$

4) א. ביחס לדיסקה: $\theta'(t)=0\ ,\ r'(t)=R-\frac{1}{2}a_0t^2\ ,$

ביחס למעבדה: $\theta(t)=\omega t\ ,\ r(t)=R-\frac{1}{2}a_0t^2$ ב. $T=m\left(a_0+\omega^2\left(R-\frac{1}{2}a_0t^2\right)\right)$

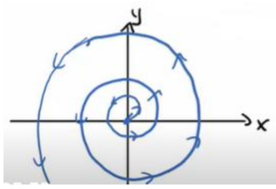
ג. $N_z=mg$

5) א. $|\vec{v}|\approx1521\frac{m}{\sec}$ ב. $\ddot{\theta}\approx-4.03\cdot10^{-4}\frac{rad}{\sec^2}\ ,\ \ddot{r}=7.44\frac{m}{\sec^2}$

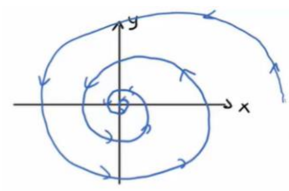
6) א. $\sum F_r=0\ ,\ \sum F_\theta=N_\theta\ ,\ \sum F_z=N_z-mg$ ב. $\ddot{r}-\dot{\theta}^2r=0$

ג. $\dot{r}=\omega Ae^{\omega t}-\omega Be^{-\omega t}\ ,\ A=B=\frac{d}{2}$ ד. $N_\theta=m\omega^2d\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)\ ,\ N_z=mg$

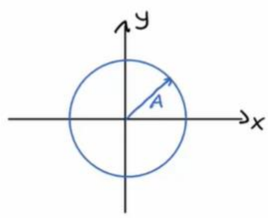
7) א. $r=A\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^\alpha$ ב. $\alpha>0$:



$\alpha<0$:



$\alpha=0$:



ג. $N\approx2.39$

8) א. $\vec{r}(t)=At^\alpha\left(-\cos\left(e^{ct}-1\right)\hat{x}-\sin\left(e^{ct}-1\right)\hat{y}\right)$

ב. $x(t)=-\frac{1}{2}At^\alpha\ ,\ y(t)=0$

$v_x(t)=-\frac{1}{2}A\alpha t^{\alpha-1}\ ,\ a_x(t)=-\frac{1}{2}A\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$

ג. תנועה בתאוצה קבועה בקו ישר.

9) א. $\vec{v}=0.5\hat{r}+0.1t\hat{\theta}\ ,\ \vec{a}=-0.02\cdot t\hat{r}+0.2\hat{\theta}$

ב. כי הוא לא זז במהירות קבועה ביחס למעבדה.

ג. רכיב רציאלי: תאוצה רציאלית מהתנועה.

רכיב θ: $v_\theta=\omega r$ בגלל ש-r משתנה צריך תאוצה בכיוון θ שתגדיל את המהירות בכיוון θ אפילו ש-ω קבוע.

10) $\sqrt{gR_E}$

11) א. התנועה היא של הפינות של ריבוע הקטן ומסתובב. המפגש יהיה במרכז.

ב. $\frac{d}{v}$ ג. $\frac{\ln 2}{2\pi}$

ד. $\vec{r}(t)=\left(-\frac{vt}{\sqrt{2}}+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)\left[\cos\left(\ln\left(\frac{d}{d-vt}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\hat{x}+\sin\left(\ln\left(\frac{d}{d+t}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\hat{y}\right]$

12) א. $\frac{m_1}{m_2}=\frac{r_2}{r_1}$ ב. $\ddot{r}_1=\omega^2 r_1$ ג. $r_1(t)=\frac{r_1}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)$

13) $r_{max}=\sqrt{(\mu_s g)^2-(2C\omega_0)^2}\left(\frac{1}{\omega_0}\right)$

14) א. $x_1=v_0\cos\alpha\cdot t\ ,\ y_1=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$

ב. $\tan\theta=\frac{v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2}{v_0\cos\alpha t}\ ,\ r=\sqrt{(v_0\cos\alpha\cdot t)^2+\left(v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}$

ג. $x_2=R\cos\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t\right)\ ,\ y_2=R\sin\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t\right)$ ד. $r=R\ ,\ \theta=\frac{\pi}{2}-|\omega|\cdot t$

ה. $x_{1,2}=v_0\cos\alpha t-R\cos\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t\right)\ ,\ y_{1,2}=v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt-R\sin\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t\right)$

ו. $\tan\alpha=\frac{\frac{1}{2}gt_0{}^2+R\sin\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t_0\right)}{R\cos\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t_0\right)}$

$v_0{}^2t_0{}^2=\left(\frac{1}{2}gt_0{}^2+R\sin\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t_0\right)\right)^2+R^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-|\omega|t\right)$ ז. אחריו.

ח. וקטורי המהירות חייבים להיות שווים בגודל ובכיוון.

ט. $y=\frac{v_0\cos\alpha}{|\omega|}$

15) א. ראה סרטון. ב. ראה סרטון.