

תורת ההסתברות והסטטיסטיקה

פרק 43 - קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים. 1

קונבולוציה – התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים:

רקע:

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם:
 $T = X + Y$ - שגם הוא משתנה מקרי.
 אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y , פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y) dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(2)$. מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T = X + Y$.

שאלות:

- (1) נתון ש- $Y, X \sim \exp(\lambda)$. כמו כן ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים. מצאו את פונקציית הצפיפות של $X + Y$.
- (2) נתון ש- X ו- Y משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית. הוכיחו ש- $T = X + Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.
- (3) סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל-3 שעות. כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכולל של פעילות המכשיר. א. מצאו את פונקציית הצפיפות של Z . ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ-4 שעות?
- (4) X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות: $f_x(x) = \frac{1}{4}$ $-2 \leq x \leq 2$, $f_y(y) = \begin{cases} y+1 & -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$. מצאו את פונקציית הצפיפות של $X + Y$.
- (5) יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X \sim U(2,3)$ $Y \sim U(1,5)$. א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו? ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?
- (6) יהיו X, Y ו- Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל-1. מצאו את פונקציית הצפיפות של: $X + Y + Z$.
- (7) הוכיחו את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף. (רמז: היעזרו בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

תשובות סופיות:

$$f_T(t) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t \quad t \geq 0 \quad (1)$$

(2) שאלת הוכחה.

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{1-z}) & 1 \leq z \leq 3 \\ \frac{1}{2}(e^{3-z} - e^{1-z}) & z > 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א. ב. 0.841} \quad (3)$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(t+3)^2 & -3 \leq t \leq -2 \\ \frac{1}{8}(2 - (t+1)^2) & -2 < t < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{8}(2 - (t-1)^2) & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{4} & 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{4} & 4 < t < 7 \\ \frac{8-t}{4} & 7 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad \text{א. ב. 4.5} \quad (5)$$

$$f_w(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{2} & 0 \leq w \leq 1 \\ -w^2 + 3w - 1.5 & 1 < w < 2 \\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2 \leq w \leq 3 \end{cases} \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.