

מתמטיקה 2

פרק 13 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז)

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז)..... 1

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\max \{xy\} \quad s.t. \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\max \{2x + y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \quad (7)$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מיושליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.} \quad (9)$$

התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מיושליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסח ופתור את בעיית מיושליה.

- 10** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסח ופתור את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסח ופתור את הבעיה.
- 12** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(9)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(10)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(11)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(12)}$$