

מבוא לסטטיסטיקה לניהול

פרק 47 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות

תוכן העניינים

1. התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות..... 1
2. התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות..... 4
3. התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות..... 6
4. התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות..... 8

התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

קיימות n התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו: $i = 1, 2, \dots, n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$.

ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגויות הללו: $\sum_{i=1}^n X_i$.

משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסוני עם פרמטר: $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

לסיכום, אם: $i = 1, 2, \dots, n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז מתקיים: $\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות ג'לי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצבעים כתום, ירוק, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצבעים בשניית ייצור במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשנייה כלשהי בכל אחד מהצבעים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצבעים האחרים.

א. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי ייווצרו בדיוק 14 סוכריות ג'לי במפעל?

ב. מה ההתפלגות של מספר סוכריות הג'לי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?

ג. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי המפעל ייצר 3 סוכריות כתומות ו-8 סוכריות בצבעים אחרים?

צבע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

תשובה :



$$. P(T = 14) = e^{-12} \cdot \frac{12^{14}}{14!} = 0.0905 \quad \text{א.}$$

$$. \sum_{j=1}^{60} T_j \sim P(12 \cdot 60 = 720) , \quad j \quad \text{ב.} \quad T_j \sim P(12) \quad \text{מספר סוכריות שמיוצרות בשנייה}$$

$$. P(X_1 = 4 \cap T = 8) - P(X_1 = 4 \cap \sum_{i=2}^4 X_i = 4) = P(X_1 = 4) \cdot P\left(\sum_{i=2}^4 X_i = 4\right) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^4}{4!} = 0.0112 \quad \text{ג.}$$

שאלות:

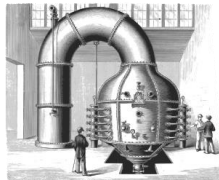
- (1) איזבלה היא רשת של חנויות בגדים. לרשת שלוש חנויות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובחנות C קצב הרכישות הוא 2 לרבע שעה. אין תלות בין מספרי הרכישות בחנויות הרשת השונות.



א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל חנויות הרשת בשעה?

ב. מה ההסתברות שבשעה כלשהי מספר הרכישות בחנויות הרשת יהיה לכל היותר 5?

- (2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א' מתפלג פואסוני עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב' מתפלג פואסוני עם תוחלת של תקלה אחת ביום.



מספרי התקלות במכונות השונות בלתי תלויים זה בזה.

א. מה ההתפלגות של מספר התקלות במפעל ביום?

ב. מה ההסתברות שביומיים מסוימים כלל לא יהיו תקלות במפעל?

ג. מה ההסתברות שביומיים מסוימים יהיו במפעל בדיוק 5 תקלות, שמהן בדיוק 3 תקלות במכונה א'?

תשובות סופיות:

- (1) א. תוחלת: 15, סטיית תקן: $\sqrt{15}$. ב. 0.0028.
 (2) א. פואסוני עם פרמטר 3. ב. 0.0025. ג. 0.0529.

התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינומית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית עם פרמטר p . באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית עם הפרמטרים (n_i, p) לכל: $i = 1, 2, \dots, m$, והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים: $\left(\sum_{i=1}^m n_i, p\right)$.

דוגמה:



ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים. מהי התפלגות מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3? מהי תוחלת מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה: ב"ת

$X_1 \sim B\left(n_1 = 4, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.

$X_2 \sim B\left(n_2 = 2, P = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שדינה קיבלת פחות מ-3.

$$X_1 + X_2 \sim B\left(n = 4 + 2 = 6, P = \frac{1}{3}\right)$$

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow E(X) = n \cdot P$$

$$E(X_1 + X_2) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

שאלות:



- (1) יוסי מטיל מטבע ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבע שש פעמים.
אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.
א. מה ההתפלגות של X ?
ב. מה התוחלת ומה השונות של X ?



- (2) במבחן שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסוג נכון או לא נכון. סטודנט ניגש לבחינה ומנחש את כל התשובות בבחינה.
א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היותר על 3 שאלות?
ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה של הסטודנט?



- (3) רונן הזמין למסיבת יום ההולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים. כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.7, וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9. ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.
א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבה בדיוק 9 גברים ו-8 נשים?
ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבה לפחות 17 אורחים?

- (4) נתון ש: $X \sim B(2, 0.5)$, $Y \sim B(3, 0.6)$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.
א. מצאו את ההתפלגות של $X + Y$.
ב. מצאו את: $P(X + Y = 2 | X > 0)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim B(10, 0.5)$ ב. $E(X) = 5$, $V(X) = 2.5$
(2) א. 0.0178 ב. תוחלת: 7.5, שונות: 4.375
(3) א. 0.0521 ב. 0.0751
(4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. 0.2133

התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית שלילית עם פרמטר p . באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i = 1, 2, \dots, m$, ואם ידוע שהמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m, p) .

דוגמה:

עודד משחק בשני שלבים:

1. בשלב הראשון הוא מטיל קובייה עד אשר הוא מקבל את התוצאה 1. ברגע שהוא מקבל את התוצאה 1 הוא עובר לשלב השני, ובו הוא שוב מטיל את הקובייה עד שהוא מקבל את התוצאה 4.



א. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב הראשון?

ב. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב השני?

ג. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות במשחק?

תשובות (פתרון בהקלטה):

א. $X_1 = \text{מספר ההטלות בשלב הראשון} \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ב. $X_2 = \text{מספר ההטלות בשלב השני} \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ג. $X_1 + X_2 \sim NB\left(2, \frac{1}{6}\right)$.

שאלות:

- (1) יוסי מטיל מטבע עד לקבלת "עץ", ודנה מטילה מטבע (באופן לא תלוי ביוסי) עד לקבלת "פלי". X הוא מספר ההטלות של יוסי ודנה יחד.
- א. מה ההתפלגות של X ?
- ב. מה התוחלת ומה השונות של X ?



- (2) אדם מנסה להתקשר למוקד שירות. הוא מתקשר עד אשר יקבל מענה. ההסתברות למענה במוקד השירות היא 0.4 בכל פעם, ללא תלות בניסיונות האחרים. אחרי שסיים את השיחה שבה קיבל מענה, האדם נזכר ששכח לשאול שאלה נוספת. הוא מתקשר שוב למוקד השירות עד לקבלת מענה.
- א. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שש פעמים?
- ב. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שבע פעמים, אם ידוע שבפעם הראשונה הוא נאלץ להתקשר שלוש פעמים עד לקבלת מענה?

- (3) X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2 לכל: $i = 1, 2, \dots, 5$, וכמו כן נתון ש- $X_1, X_2, \dots, X_5$. בלתי-תלויים זה בזה.

א. מה ההסתברות ש: $\sum_{i=1}^5 X_i = 5$?

ב. חשבו את: $P\left(\sum_{i=1}^5 X_i = 12 \mid X_1 = 2\right)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim NB\left(2, \frac{1}{2}\right)$. ב. תוחלת: 4, שונות: 4.
- (2) א. 0.10368. ב. 0.0864.
- (3) א. 0.00032. ב. 0.0352.

התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסוניית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X

בהינתן $X + Y = n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

דוגמה:



מספר בני האדם הנכנסים לבית קפה מסוים בשעה מתפלג פואסוניית עם ממוצע 6. מספר הכלבים הנכנסים לבית הקפה בשעה מתפלג פואסוניית עם שונות 1. נניח שאין תלות בין השניים. מה הסיכוי שבשעה האחרונה נכנסו לבית הקפה בדיוק שני כלבים, אם ידוע שבסך הכול נכנסו שבעה בני אדם וכלבים?

תשובה:

$X \sim P(\lambda_1 = 1)$ - מספר הכלבים הנכנסים בשעה.

$Y \sim P(\lambda_2 = 6)$ - מספר בני האדם הנכנסים בשעה.

X, Y ב"ת.

$$X \sim P(\lambda_1)$$

$$Y \sim P(\lambda_2)$$

$\Downarrow$

$$X | X + Y = n \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

$$X | X + Y = 7 \sim B\left(7, \frac{1}{7}\right)$$

$$P(X = 2 | X + Y = 7) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^5 = 0.1983$$

שאלות:

- (1) מספר הפסקות החשמל היוזמות במפעל זורקס מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 בחודש. מספר הפסקות החשמל הלא-יוזמות במפעל מתפלג פואסונית עם תוחלת של 3 בחודש. מספר הימים בחודש כלשהו זניח. אין תלות בין מספר ההפסקות היוזמות למספר ההפסקות שאינן יוזמות.



א. מה הסיכוי שברבעון הראשון של השנה יהיו בדיוק 5 הפסקות חשמל במפעל וגם שבחודש ינואר של אותה שנה תהיה בדיוק הפסקה אחת?

ב. מהי התוחלת של מספר החודשים שיעברו מינואר 2020 ועד החודש הראשון שבו לא יהיו כלל הפסקות חשמל?

ג. אם בחודש מרץ הבא יהיו בדיוק 6 הפסקות חשמל במפעל זורקס, מה התוחלת של מספר ההפסקות היוזמות שיהיו באותו החודש?

- (2) מספר המכירות המתרחשות בשעה בחנות הצעצועים טויזים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 6 בשעה. החנות פתוחה בכל יום במשך שמונה שעות, מהשעה 11:00.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יהיו לפחות 3 מכירות בחנות הצעצועים טויזים?

ב. מה ההסתברות שבשעה הראשונה שלאחר פתיחת החנות יהיו 4 מכירות, אם באותו היום יהיו בסך הכול 50 מכירות?

ג. בכל יום מנהל החנות מקבל דוח ובו פירוט של מספר הרכישות שהיו בכל שעה שלמה מאז פתיחת החנות. מה ההסתברות שמחר, מתוך שמונה השעות שבהן החנות פתוחה, תהיה בדיוק שעה אחת שבה יהיו בדיוק 5 רכישות?

- (3) מספר הגברים המגיעים לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה מתפלג פואסונית בקצב של 2 לשעה. מספר הנשים המגיעות לטיפול באותו חדר מיון מתפלג פואסונית בקצב של 1 לשעה. אין תלות בין מספר הגברים המגיעים לחדר המיון ובין מספר הנשים המגיעות אליו.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יגיע לפחות אדם אחד לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה?

ב. אם בשעה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 5 אנשים, מה ההסתברות שמתוכם יש בדיוק 2 נשים?

ג. אם ביממה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 60 אנשים, מהי השונות של מספר הגברים שהגיעו לטיפול בחדר המיון באותה היממה?

(4) בסניף דואר מסוים יש שלושה אשנבים (1, 2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 3, ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 4.



אין תלות בין מספרי האנשים הנכנסים לסניף בדקות שונות, ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים. כל אדם שנכנס לסניף הדואר פונה בהכרח לאחד מן האשנבים.

- א. מהי ההסתברות שבין 8:00 ל-8:01 ייכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר?
 ב. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1?
 ג. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו לסניף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך הכול נכנסו לסניף הדואר באותה הדקה תשעה אנשים?

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-----------|---------------------|--------------------|-----|
| א. 0.0946 | ב. 148.4 | ג. 2.4 | (1) |
| א. 0.938 | ב. 0.1209 | ג. 0.3772 | (2) |
| א. 0.9502 | ב. $\frac{80}{243}$ | ג. $13\frac{1}{3}$ | (3) |
| א. 0.1318 | ב. 0.2041 | ג. 0.149 | (4) |