

סטטיסטיקה וביוסטטיסטיקה

פרק 18 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

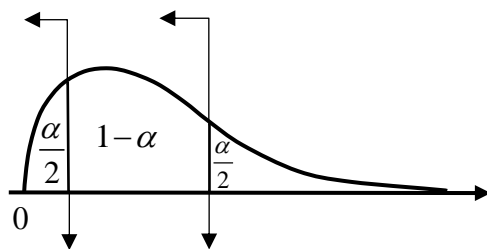
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.046779	0.063788	0.085298	0.111454	0.148682	0.200902
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214778	0.397807	0.710681	1.024203	1.385829	1.847541	2.338110	2.772893	3.841463
3	0.071714	0.115777	0.216449	0.352729	0.584394	0.924549	1.374786	1.924549	2.602521	3.347133	4.108452	4.878314	6.251362
4	0.207161	0.297772	0.484418	0.711162	1.064495	1.625561	2.365879	3.357163	4.540759	5.988622	7.779435	9.487714	12.838159
5	0.411643	0.554267	0.831413	1.154821	1.610730	2.335822	3.357163	4.607893	6.251362	8.252651	10.755902	13.121679	17.534548
6	0.675654	0.872243	1.238562	1.635309	2.202791	3.152649	4.533891	6.167885	8.235721	10.644642	13.454387	16.012786	21.487000
7	0.989266	1.240053	1.690766	2.179002	2.833058	3.827756	5.398767	7.344103	9.890651	12.591614	15.707515	18.475174	25.188138
8	1.344296	1.649778	2.180094	2.732637	3.490055	4.541965	6.345875	8.445909	11.148353	14.067064	17.534548	20.090228	27.153871
9	1.734724	2.099872	2.700108	3.337143	4.168223	5.021475	6.345875	8.445909	11.148353	14.067064	17.534548	20.090228	27.153871
10	2.169772	2.565954	3.250133	3.940293	4.875270	5.790874	7.344103	9.890651	12.591614	15.985221	19.022832	22.161613	30.578682
11	2.601054	3.052865	3.820802	4.575829	5.581404	6.634896	8.445909	11.148353	13.580892	16.919080	21.920900	24.724971	34.152463
12	3.076472	3.571846	4.401212	5.230215	6.302137	7.489523	9.348098	11.337884	14.567697	18.577534	23.336664	26.217065	37.675313
13	3.571846	4.111436	5.010808	5.891455	7.041535	8.445909	10.382321	12.338110	15.478541	19.811903	24.724971	27.688138	41.401362
14	4.077724	4.669778	5.630802	6.570867	7.790115	9.348098	11.337884	13.337884	16.448539	21.064148	26.119321	29.141221	45.155270
15	4.602876	5.235954	6.260133	7.261578	8.551423	10.382321	12.338110	14.338110	17.459014	22.307172	27.587153	30.578682	48.783138
16	5.146472	5.810802	6.910802	7.964578	9.310115	11.337884	13.337884	15.337884	18.567697	23.665834	28.845034	32.000601	52.279513
17	5.707724	6.410802	7.560802	8.670115	10.110115	12.338110	14.337884	16.337884	19.777534	25.000000	30.191064	33.408714	55.812138
18	6.265954	7.010802	8.230802	9.390115	10.910115	13.337884	15.337884	17.337884	21.022832	26.337884	31.526334	34.805313	59.341362
19	6.840802	7.630802	8.910802	10.110115	11.710115	14.337884	16.337884	18.337884	22.307172	27.665834	32.908714	36.191064	62.912138
20	7.430802	8.260802	9.590802	10.910115	12.440115	15.337884	17.337884	19.337884	23.665834	29.000000	34.287153	37.566334	66.569513
21	8.035954	8.900802	10.300802	11.660115	13.200115	16.337884	18.337884	20.337884	25.000000	30.437884	35.567697	38.932138	70.224513
22	8.645954	9.540802	11.030802	12.330115	14.000115	17.337884	19.337884	21.337884	26.337884	31.777534	36.787153	40.287153	73.921362
23	9.260802	10.200802	11.710802	13.100115	14.800115	18.337884	20.337884	22.337884	27.665834	33.110115	38.000000	41.632138	77.651362
24	9.890802	10.900802	12.400802	13.800115	15.600115	19.337884	21.337884	23.337884	29.000000	34.437884	39.337884	43.000000	81.441362
25	10.530802	11.550802	13.100802	14.600115	16.500115	20.337884	22.337884	24.337884	30.437884	35.777534	40.665834	44.337884	85.281362
26	11.180802	12.200802	13.800802	15.400115	17.300115	21.337884	23.337884	25.337884	31.777534	37.110115	41.900000	45.665834	89.171362
27	11.840802	12.900802	14.600802	16.200115	18.100115	22.337884	24.337884	26.337884	33.110115	38.437884	43.200000	47.000000	93.121362
28	12.510802	13.600802	15.300802	16.900115	18.900115	23.337884	25.337884	27.337884	34.437884	39.777534	44.500000	48.337884	97.171362
29	13.190802	14.300802	16.000802	17.700115	19.800115	24.337884	26.337884	28.337884	35.777534	41.110115	45.700000	49.665834	101.371362
30	13.880802	15.000802	16.800802	18.500115	20.600115	25.337884	27.337884	29.337884	37.110115	42.500000	47.000000	50.900000	105.671362