

סטטיסטיקה והסתברות

פרק 60 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

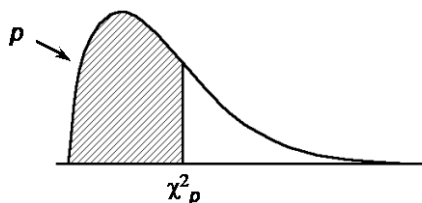
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

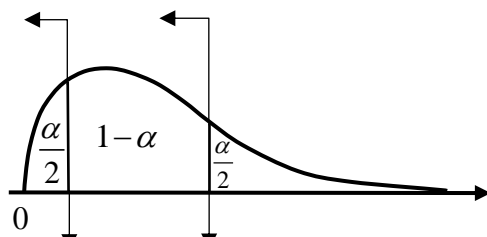
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.048382	0.067564	0.093924	0.129381	0.188773	0.271885
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214778	0.374544	0.575554	0.717743	0.900000	1.102628	1.385829	1.734847	2.202691
3	0.071714	0.115777	0.216449	0.352729	0.584394	0.924340	1.212761	1.495583	1.924549	2.365777	2.834697	3.438224	4.351464
4	0.207161	0.297772	0.484418	0.711162	1.064515	1.625561	2.145771	2.486171	3.119164	3.745401	4.478525	5.407793	6.626120
5	0.411643	0.554267	0.831413	1.154873	1.610732	2.335941	3.000649	3.484997	4.351464	5.023214	5.891547	7.041545	8.537683
6	0.675654	0.872243	1.238562	1.645561	2.204130	3.000649	3.756553	4.351464	5.348156	6.167861	7.231357	8.553770	10.236853
7	0.989266	1.240053	1.690766	2.179002	2.833058	3.756553	4.605315	5.348156	6.344535	7.377787	8.537683	10.001863	11.977555
8	1.344296	1.649778	2.180094	2.732637	3.490295	4.575553	5.311735	6.167861	7.344187	8.445874	9.777941	11.328214	13.361536
9	1.734847	2.099719	2.700108	3.337133	4.167557	5.311735	6.167861	7.162621	8.445874	9.777941	11.328214	13.361536	15.987231
10	2.169905	2.566973	3.250132	3.940293	4.875274	6.167861	7.162621	8.178767	9.590895	11.017794	12.591617	14.684570	17.534548
11	2.602521	3.052769	3.820802	4.575553	5.581415	7.162621	8.178767	9.236353	10.828138	12.591617	14.684570	16.919079	19.678113
12	3.076473	3.571847	4.401714	5.230215	6.302131	8.178767	9.236353	10.371574	12.178053	13.816165	15.987231	18.549423	21.912668
13	3.571847	4.114386	5.010805	5.890789	7.041545	9.236353	10.371574	11.481764	13.276678	15.004010	17.275014	20.000000	24.735593
14	4.077715	4.669441	5.630090	6.575553	7.790074	10.371574	11.481764	12.640704	14.684570	16.453087	18.475176	21.912668	27.688138
15	4.602521	5.230215	6.260094	7.260094	8.553770	11.481764	12.640704	13.816165	16.265766	17.779327	20.000000	23.684794	30.578598
16	5.144296	5.810094	6.910094	7.960094	9.310094	12.640704	13.816165	14.977555	17.779327	19.151044	21.782261	25.000000	33.408853
17	5.702521	6.410094	7.560094	8.670094	10.100094	13.816165	14.977555	16.126678	19.151044	20.515387	23.000000	26.591617	36.191267
18	6.260094	7.010094	8.230094	9.390094	10.900094	14.977555	16.126678	17.311764	20.515387	21.912668	24.000000	28.000000	39.000000
19	6.840094	7.630094	8.910094	10.100094	11.700094	16.126678	17.311764	18.549423	21.912668	23.000000	25.000000	29.000000	41.912668
20	7.430094	8.260094	9.590094	10.900094	12.400094	17.311764	18.549423	19.840704	23.000000	24.000000	26.000000	30.000000	44.912668
21	8.030094	8.900094	10.300094	11.600094	13.200094	18.549423	19.840704	21.126678	24.000000	25.000000	27.000000	31.000000	47.912668
22	8.640094	9.540094	11.000094	12.300094	14.000094	19.840704	21.126678	22.411764	25.000000	26.000000	28.000000	32.000000	50.912668
23	9.260094	10.200094	11.700094	13.100094	14.800094	21.126678	22.411764	23.700000	26.000000	27.000000	29.000000	33.000000	53.912668
24	9.890094	10.900094	12.400094	13.800094	15.700094	22.411764	23.700000	25.000000	27.000000	28.000000	30.000000	34.000000	56.912668
25	10.500094	11.500094	13.100094	14.600094	16.500094	23.700000	25.000000	26.300000	28.000000	29.000000	31.000000	35.000000	60.000000
26	11.200094	12.200094	13.800094	15.400094	17.300094	25.000000	26.300000	27.600000	29.000000	30.000000	32.000000	36.000000	63.000000
27	11.800094	12.900094	14.600094	16.200094	18.100094	26.300000	27.600000	28.900000	30.000000	31.000000	33.000000	37.000000	66.000000
28	12.500094	13.600094	15.300094	16.900094	18.900094	27.600000	28.900000	30.200000	31.000000	32.000000	34.000000	38.000000	69.000000
29	13.100094	14.300094	16.000094	17.700094	19.800094	28.900000	30.200000	31.500000	32.000000	33.000000	35.000000	39.000000	72.000000
30	13.800094	15.000094	16.800094	18.500094	20.600094	30.200000	31.500000	32.800000	33.000000	34.000000	36.000000	40.000000	75.000000