

עקרונות ויישומים בניתוח סטטיסטי

פרק 9 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

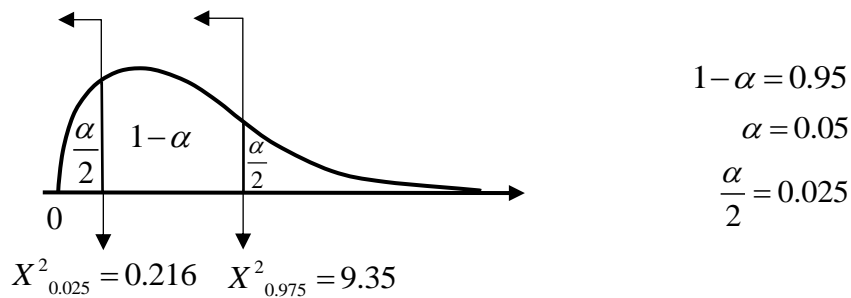
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.048382	0.067564	0.093924	0.125916	0.167656	0.223271
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.210782	0.352729	0.501219	0.717142	0.990437	1.385775	1.847541	2.447873	3.000804
3	0.071714	0.115777	0.216449	0.352729	0.584394	0.853787	1.212768	1.635309	2.247815	2.964565	3.845134	4.878397	6.251362
4	0.207471	0.297871	0.484418	0.711162	1.064495	1.520696	2.071846	2.700399	3.438162	4.279552	5.191502	6.316717	7.779435
5	0.411643	0.554267	0.831476	1.155371	1.610732	2.202774	2.964565	3.845134	4.878397	5.988721	7.289177	8.717730	10.591422
6	0.675654	0.872243	1.236778	1.635309	2.202774	2.964565	3.845134	4.878397	5.988721	7.289177	8.717730	10.591422	12.838158
7	0.989266	1.239831	1.690865	2.179730	2.833058	3.792780	4.779035	5.891555	7.166729	8.541553	10.001875	11.827459	14.164572
8	1.344296	1.650007	2.179730	2.732637	3.490295	4.540759	5.527747	6.634890	7.978475	9.487714	11.030774	12.838158	15.507413
9	1.734724	2.093024	2.700399	3.337133	4.168223	5.021478	6.024198	7.166729	8.541553	10.001875	11.591253	13.361536	16.012786
10	2.160133	2.558233	3.246971	3.940293	4.878397	5.790854	6.756871	7.978475	9.487714	11.030774	12.591644	14.164572	16.919089
11	2.602480	3.052769	3.816755	4.575819	5.581418	6.423296	7.420373	8.641603	10.177795	11.779386	13.016799	14.567697	17.534573
12	3.076472	3.571796	4.401598	5.229655	6.302137	7.178054	8.215751	9.487714	11.030774	12.591644	14.164572	15.013266	18.184108
13	3.571796	4.114880	5.011853	5.891555	7.041498	7.928829	9.033491	10.384796	12.016799	13.678054	15.013266	16.012786	18.965811
14	4.077724	4.669896	5.634565	6.575819	7.791635	8.641603	9.777941	11.148351	12.838158	14.567697	16.012786	17.153868	19.678104
15	4.602873	5.230238	6.266959	7.262157	8.537874	9.347826	10.519654	11.827459	13.678054	15.013266	17.153868	18.307037	20.411314
16	5.145583	5.810007	6.914565	7.961635	9.310007	10.177795	11.327747	12.591644	14.567697	16.012786	18.184108	19.367512	21.161228
17	5.704641	6.410007	7.566755	8.671635	10.100007	11.030774	12.016799	13.016799	15.013266	17.012786	19.367512	20.411314	21.927104
18	6.269896	7.010007	8.230007	9.390007	10.900007	11.779386	12.591644	13.678054	15.591253	17.534572	19.777941	20.838158	22.708104
19	6.841553	7.630007	8.910007	10.100007	11.700007	12.591644	13.361536	14.164572	16.012786	18.012786	20.001875	21.361536	23.504104
20	7.430007	8.260007	9.590007	10.900007	12.400007	13.361536	14.164572	14.838158	16.591253	18.534572	20.524799	21.884960	24.315104
21	8.035007	8.900007	10.300007	11.600007	13.200007	14.164572	15.013266	15.591253	17.012786	19.012786	21.030774	22.361536	25.141104
22	8.641553	9.540007	11.000007	12.300007	14.000007	15.013266	16.012786	16.591253	17.534572	19.534572	21.524799	22.838158	25.982104
23	9.260007	10.200007	11.700007	13.100007	14.800007	16.012786	17.012786	17.591253	18.012786	20.001875	22.012786	23.307037	26.838158
24	9.890007	10.900007	12.400007	13.800007	15.700007	17.012786	17.591253	18.534572	18.534572	20.524799	22.500007	23.777941	27.708104
25	10.500007	11.500007	13.100007	14.600007	16.500007	18.012786	18.012786	19.012786	19.012786	21.030774	23.000007	24.247999	28.591253
26	11.200007	12.200007	13.800007	15.400007	17.300007	19.012786	19.012786	19.534572	19.534572	21.524799	23.500007	24.716751	29.487714
27	11.800007	12.900007	14.600007	16.200007	18.100007	20.012786	20.012786	20.012786	20.012786	22.012786	24.000007	25.184960	30.391253
28	12.500007	13.600007	15.300007	16.900007	18.900007	21.012786	21.012786	21.012786	21.012786	22.500007	24.500007	25.650007	31.307037
29	13.100007	14.300007	16.000007	17.700007	19.800007	22.012786	22.012786	22.012786	22.012786	23.000007	25.000007	26.116751	32.230238
30	13.800007	15.000007	16.800007	18.500007	20.600007	23.012786	23.012786	23.012786	23.012786	23.500007	25.500007	26.584960	33.161253