

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 32 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

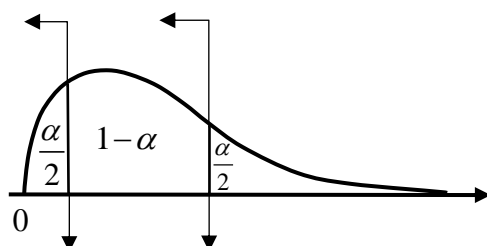
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.015775	0.023354	0.053988	0.102430	1.320764	2.705543	3.841463	5.023890	6.634896	7.879446
2	0.010000	0.020000	0.050610	0.103823	0.214778	0.575554	1.390251	2.770677	4.605170	5.991465	7.377787	9.210743	10.596631
3	0.071714	0.115777	0.216659	0.352725	0.584358	1.212765	2.370177	4.110825	6.251391	7.814727	9.347825	11.344831	12.838158
4	0.207264	0.297772	0.484418	0.711162	1.064515	1.920907	3.357163	5.390294	7.779436	9.487714	11.141651	13.276698	14.860204
5	0.411538	0.554267	0.831413	1.154922	1.615772	2.675146	4.351464	6.625564	9.246451	11.070499	12.832502	15.086251	16.750428
6	0.675650	0.872243	1.238562	1.635309	2.204130	3.453383	5.348153	7.879170	10.644645	12.591610	14.449130	16.750428	18.547564
7	0.989266	1.240131	1.690766	2.179002	2.833058	4.253859	6.346867	9.037185	12.016770	14.164574	16.012784	18.475309	20.277713
8	1.344296	1.649738	2.180091	2.733062	3.490352	5.070831	7.344187	10.215707	13.361536	15.507413	17.534548	20.090238	22.026316
9	1.734724	2.099879	2.700108	3.337147	4.177187	5.903854	8.340734	11.416654	14.697787	16.919080	19.022813	21.665991	23.589312
10	2.169903	2.565927	3.250133	3.940347	4.875274	6.749955	9.347825	12.591651	16.012784	18.307034	20.530905	23.200714	25.188150
11	2.602480	3.052829	3.820801	4.575829	5.581415	7.578313	10.337134	13.700537	17.337370	19.678052	21.912621	24.724954	26.756853
12	3.076329	3.571796	4.401201	5.233055	6.302137	8.444672	11.334734	14.800932	18.574534	21.026031	23.336714	26.217065	28.304220
13	3.571545	4.111425	5.010803	5.891461	7.041535	9.302488	12.338028	16.000044	19.811903	22.442907	24.735593	27.688137	29.819134
14	4.077715	4.661200	5.630604	6.570765	7.790562	10.202907	13.337468	17.153870	21.064172	23.684671	26.119395	29.141223	31.319226
15	4.602876	5.230738	6.260557	7.261172	8.552783	11.147353	14.337878	18.245953	22.307034	25.000136	27.587153	30.578438	32.801303
16	5.145688	5.810000	6.910562	7.962668	9.316558	11.998533	15.337878	19.442703	23.541896	26.296227	28.845032	32.000233	34.266523
17	5.704783	6.410000	7.560562	8.674262	10.102608	12.800000	16.337878	20.592868	24.796227	27.591227	30.191064	33.408714	35.718463
18	6.269264	7.010000	8.230562	9.395962	10.930000	13.700000	17.337878	21.664172	26.010767	28.869100	31.526314	34.805309	37.153763
19	6.849143	7.630000	8.910562	10.117187	11.790000	14.600000	18.337878	22.770677	27.203514	30.191227	32.909532	36.190870	38.581226
20	7.434296	8.260000	9.590562	10.930000	12.400000	15.500000	19.337878	23.800000	28.442703	31.410431	34.200000	37.566470	40.000000
21	8.034724	8.900000	10.300000	11.660000	13.200000	16.300000	20.337878	24.900000	29.642703	32.671227	35.560000	38.930000	41.400000
22	8.649143	9.540000	11.000000	12.300000	14.000000	17.200000	21.337878	26.000000	30.800000	33.900000	36.780000	40.280000	42.780000
23	9.269264	10.200000	11.700000	13.100000	14.800000	18.100000	22.337878	27.100000	32.000000	35.200000	38.100000	41.600000	44.150000
24	9.899796	10.900000	12.400000	13.800000	15.700000	19.000000	23.337878	28.200000	33.200000	36.400000	39.400000	43.000000	45.500000
25	10.539724	11.550000	13.100000	14.600000	16.500000	19.900000	24.337878	29.300000	34.400000	37.700000	40.600000	44.300000	46.900000
26	11.189724	12.200000	13.800000	15.400000	17.300000	20.800000	25.337878	30.400000	35.600000	38.900000	41.900000	45.600000	48.300000
27	11.839724	12.900000	14.600000	16.200000	18.100000	21.700000	26.337878	31.500000	36.700000	40.100000	43.200000	47.000000	49.600000
28	12.489724	13.600000	15.300000	16.900000	18.900000	22.700000	27.337878	32.600000	37.900000	41.300000	44.500000	48.300000	51.000000
29	13.139724	14.300000	16.000000	17.700000	19.800000	23.600000	28.337878	33.700000	39.100000	42.600000	45.700000	49.600000	52.300000
30	13.789724	15.000000	16.800000	18.500000	20.600000	24.500000	29.337878	34.800000	40.300000	43.800000	47.000000	50.900000	53.700000