

מבוא לסטטיסטיקה

פרק 17 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

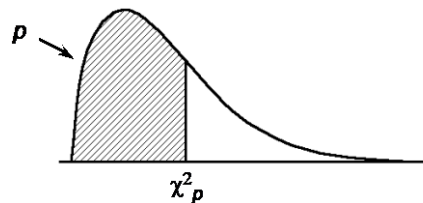
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

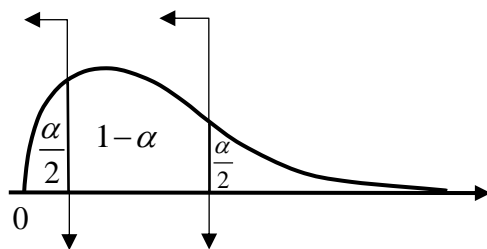
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

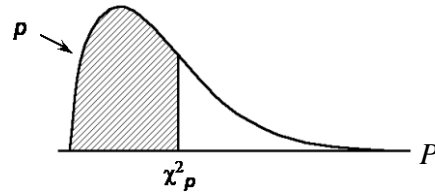
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007879	0.013503	0.020001	0.037467	0.054129	0.075793	0.101308	0.135677	0.184753	0.240012	0.308515
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.214778	0.575556	1.390251	2.770553	4.605171	5.988622	7.377757	9.210343	10.596631
3	0.071714	0.115777	0.216000	0.352729	0.584350	1.212765	2.370152	4.110853	6.251391	7.879440	9.347827	11.344534	12.838157
4	0.207471	0.297871	0.484432	0.711162	1.063131	1.920907	3.357163	5.390292	7.779436	9.487714	11.141651	13.276678	14.860204
5	0.411543	0.554267	0.831439	1.154922	1.610738	2.675146	4.351464	6.626195	9.246453	11.070499	12.832502	15.086252	16.750428
6	0.676068	0.872243	1.240131	1.645561	2.202799	3.450297	5.348156	7.879440	10.644645	12.591619	14.449408	16.750428	18.547564
7	0.989266	1.240131	1.690000	2.179851	2.833058	4.254953	6.346867	9.040898	12.016789	14.150846	16.012784	18.475309	20.277561
8	1.344296	1.650000	2.180000	2.732637	3.490000	5.070000	7.340000	10.200000	13.400000	15.500000	17.500000	20.000000	22.000000
9	1.734954	2.090000	2.700000	3.330000	4.170000	5.900000	8.340000	11.400000	14.700000	16.900000	19.000000	21.700000	23.600000
10	2.160000	2.560000	3.250000	3.940000	4.870000	6.740000	9.340000	12.500000	16.000000	18.300000	20.500000	23.200000	25.200000
11	2.600000	3.050000	3.820000	4.570000	5.580000	7.580000	10.300000	13.700000	17.300000	19.700000	21.900000	24.700000	26.800000
12	3.070000	3.570000	4.400000	5.230000	6.300000	8.440000	11.300000	14.800000	18.500000	21.000000	23.300000	26.200000	28.300000
13	3.570000	4.110000	5.010000	5.890000	7.040000	9.300000	12.300000	16.000000	19.800000	22.400000	24.700000	27.700000	29.800000
14	4.070000	4.660000	5.630000	6.570000	7.790000	10.200000	13.300000	17.100000	21.100000	23.700000	26.100000	29.100000	31.300000
15	4.600000	5.230000	6.260000	7.260000	8.550000	11.000000	14.300000	18.200000	22.300000	25.000000	27.500000	30.600000	32.800000
16	5.140000	5.810000	6.910000	7.960000	9.310000	11.900000	15.300000	19.400000	23.500000	26.300000	28.800000	32.000000	34.300000
17	5.700000	6.410000	7.560000	8.670000	10.100000	12.800000	16.300000	20.500000	24.800000	27.600000	30.200000	33.400000	35.700000
18	6.260000	7.010000	8.230000	9.390000	10.900000	13.700000	17.300000	21.600000	26.000000	28.900000	31.500000	34.800000	37.200000
19	6.840000	7.630000	8.910000	10.100000	11.700000	14.600000	18.300000	22.700000	27.200000	30.100000	32.900000	36.200000	38.600000
20	7.430000	8.260000	9.590000	10.900000	12.400000	15.500000	19.300000	23.800000	28.400000	31.400000	34.200000	37.600000	40.000000
21	8.030000	8.900000	10.300000	11.600000	13.200000	16.300000	20.300000	24.900000	29.600000	32.700000	35.500000	38.900000	41.400000
22	8.640000	9.540000	11.000000	12.300000	14.000000	17.200000	21.300000	26.000000	30.800000	33.900000	36.800000	40.300000	42.800000
23	9.260000	10.200000	11.700000	13.100000	14.800000	18.100000	22.300000	27.100000	32.000000	35.200000	38.100000	41.600000	44.200000
24	9.890000	10.900000	12.400000	13.800000	15.700000	19.000000	23.300000	28.200000	33.200000	36.400000	39.400000	43.000000	45.600000
25	10.500000	11.500000	13.100000	14.600000	16.500000	19.900000	24.300000	29.300000	34.400000	37.700000	40.600000	44.300000	46.900000
26	11.200000	12.200000	13.800000	15.400000	17.300000	20.800000	25.300000	30.400000	35.600000	38.900000	41.900000	45.600000	48.300000
27	11.800000	12.900000	14.600000	16.200000	18.100000	21.700000	26.300000	31.500000	36.700000	40.100000	43.200000	47.000000	49.600000
28	12.500000	13.600000	15.300000	16.900000	18.900000	22.700000	27.300000	32.600000	37.900000	41.300000	44.500000	48.300000	51.000000
29	13.100000	14.300000	16.000000	17.700000	19.800000	23.600000	28.300000	33.700000	39.100000	42.600000	45.700000	49.600000	52.300000
30	13.800000	15.000000	16.800000	18.500000	20.600000	24.500000	29.300000	34.800000	40.300000	43.800000	47.000000	50.900000	53.700000