

סטטיסטיקה לכלכלנים ב

פרק 14 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

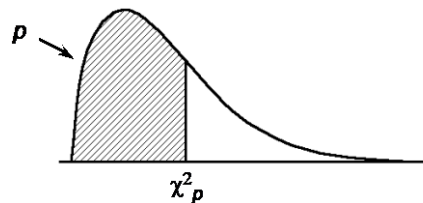
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

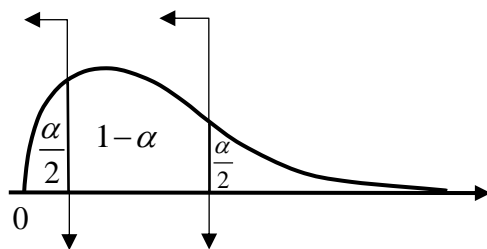
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

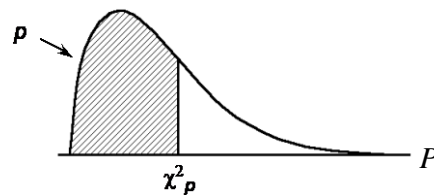
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.004575	0.004982	0.005393	0.005988	0.006758	0.007845	0.009232	0.010921	0.012938	0.015472	0.018495	0.022388
2	0.010000	0.020001	0.050606	0.103773	0.211793	0.575554	1.390251	2.776869	4.605491	5.988622	7.377757	9.210743	10.596631
3	0.071714	0.115777	0.216659	0.352725	0.584394	1.212798	2.371831	4.110843	6.251391	7.879130	9.347827	11.344533	12.838157
4	0.207581	0.297772	0.484418	0.711162	1.064508	1.920907	3.360772	5.390292	7.779435	9.487714	11.141651	13.277461	14.860204
5	0.411543	0.554267	0.831413	1.154922	1.610708	2.675846	4.351464	6.626195	9.246453	11.145413	12.832497	15.088253	16.750428
6	0.675650	0.872243	1.240131	1.645561	2.202798	3.450297	5.350301	7.879130	10.644671	12.591600	14.451417	16.750428	18.547729
7	0.989266	1.240131	1.690766	2.179002	2.833058	4.254954	6.350103	9.040952	12.016750	14.164574	16.012784	18.475309	20.277714
8	1.344296	1.651527	2.180094	2.732637	3.490297	5.074897	7.344187	10.215731	13.361536	15.507413	17.534548	20.090238	22.026316
9	1.734724	2.090238	2.700108	3.337147	4.170162	5.903789	8.340734	11.416654	14.690595	16.919080	19.022813	21.665991	23.589312
10	2.160131	2.561802	3.250133	3.940297	4.870162	6.749854	9.340734	12.591600	16.012784	18.307037	20.537566	23.200734	25.188150
11	2.602521	3.052832	3.820133	4.570162	5.580162	7.580162	10.300162	13.700162	17.300162	19.700162	21.900162	24.700162	26.750162
12	3.070162	3.570162	4.400162	5.230162	6.300162	8.440162	11.300162	14.800162	18.500162	21.000162	23.300162	26.200162	28.300162
13	3.570162	4.110162	5.010162	5.890162	7.040162	9.300162	12.300162	16.000162	19.800162	22.400162	24.700162	27.700162	29.800162
14	4.070162	4.660162	5.630162	6.570162	7.790162	10.200162	13.300162	17.100162	21.100162	23.700162	26.100162	29.100162	31.300162
15	4.600162	5.230162	6.260162	7.260162	8.550162	11.000162	14.300162	18.200162	22.300162	25.000162	27.500162	30.600162	32.800162
16	5.140162	5.810162	6.910162	7.960162	9.310162	11.900162	15.300162	19.400162	23.500162	26.300162	28.800162	32.000162	34.300162
17	5.700162	6.410162	7.560162	8.670162	10.100162	12.800162	16.300162	20.500162	24.800162	27.600162	30.200162	33.400162	35.700162
18	6.260162	7.010162	8.230162	9.390162	10.900162	13.700162	17.300162	21.600162	26.000162	28.900162	31.500162	34.800162	37.200162
19	6.840162	7.630162	8.910162	10.100162	11.700162	14.600162	18.300162	22.700162	27.200162	30.100162	32.900162	36.200162	38.600162
20	7.430162	8.260162	9.590162	10.900162	12.400162	15.500162	19.300162	23.800162	28.400162	31.400162	34.200162	37.600162	40.000162
21	8.030162	8.900162	10.300162	11.600162	13.200162	16.300162	20.300162	24.900162	29.600162	32.700162	35.500162	38.900162	41.400162
22	8.640162	9.540162	11.000162	12.300162	14.000162	17.200162	21.300162	26.000162	30.800162	33.900162	36.800162	40.300162	42.800162
23	9.260162	10.200162	11.700162	13.100162	14.800162	18.100162	22.300162	27.100162	32.000162	35.200162	38.100162	41.600162	44.200162
24	9.890162	10.900162	12.400162	13.800162	15.700162	19.000162	23.300162	28.200162	33.200162	36.400162	39.400162	43.000162	45.600162
25	10.500162	11.500162	13.100162	14.600162	16.500162	19.900162	24.300162	29.300162	34.400162	37.700162	40.600162	44.300162	46.900162
26	11.200162	12.200162	13.800162	15.400162	17.300162	20.800162	25.300162	30.400162	35.600162	38.900162	41.900162	45.600162	48.300162
27	11.800162	12.900162	14.600162	16.200162	18.100162	21.700162	26.300162	31.500162	36.700162	40.100162	43.200162	47.000162	49.600162
28	12.500162	13.600162	15.300162	16.900162	18.900162	22.700162	27.300162	32.600162	37.900162	41.300162	44.500162	48.300162	51.000162
29	13.100162	14.300162	16.000162	17.700162	19.800162	23.600162	28.300162	33.700162	39.100162	42.600162	45.700162	49.600162	52.300162
30	13.800162	15.000162	16.800162	18.500162	20.600162	24.500162	29.300162	34.800162	40.300162	43.800162	47.000162	50.900162	53.700162