

מתמטיקה א לכלכלנים

פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה 1
2. משפט ערך הביניים 5
3. שיטת החצייה 8
4. תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת 9

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-2 בדוק את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"¹ שלהן, ושרטט גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3) \text{ נתונה הפונקציה :}$$

- א. בדוק את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.
 ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבע מאיזה סוג היא.

בשאלות 4-7: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (6)$$

הערה: שאלה 7 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

¹ נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b בשאלות 8-10, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

(11) הוכח או הפרך:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(12) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה.

האם $f+g$ רציפה? הוכח את טענתך.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$.

הוכח או הפרך:

- א. הפונקציה f חסומה לכל x .
- ב. הפונקציה f רציפה לכל x .
- ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .
- ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(14) תהי $f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
- ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x . האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

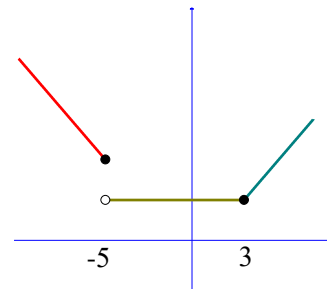
(15) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

- א. האם יתכן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמק.
- ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמק.

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. ב. סליקה.
- (4) $k=1$
- (5) $k=4$
- (6) $k=\frac{2}{3}$
- (7) $k=-1$
- (8) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (9) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (10) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.
- (14) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (15) א. לא. ב. כן.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכח שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד :

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 4-5 הוכח שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות :

$$(4) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(5) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(6) מצא קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(7) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע $(0,2)$?

(8) תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$, המקיימות :

$$f(a) < g(a), f(b) > g(b)$$

הוכח שקיימת נקודה $a < c < b$, שבה $f(c) = g(c)$.

9 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, שהוא חלקי לתחום הגדרתה.

$$. f([a, b]) \subseteq [a, b] \text{ ש-ניח}$$

הוכח כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$, כך ש- $f(c) = c$.

נקודה c כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

10 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

הוכח כי קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.

11 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = f(1)$.

א. הוכח כי קיימת נקודה $c \in [0, 0.5]$ כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$.

ב. הוכח כי קיימות נקודות $c, d \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = f(d)$.

12 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.

הוכח כי קיימים $c_1, c_2 \in [0, 2]$ כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.

13 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = f(8)$.

הוכח כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$ כך ש-

$$. f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$$

14 יהיו $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ קבועים המקיימים $a_1 + \dots + a_n = 1$.

הוכיחו כי למשוואה $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

15 יהי P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$,

ונניח כי $a_0 < 0$.

הוכח כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

16 יהיו f, g פונקציות רציפות המקיימות:

$$. 0 < k \in \mathbb{R} \text{ כאשר } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$$

הוכח כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = g(x)$.

(17) ענה על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה x_1, \dots, x_n (כאשר $n > 1$)

נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכח שקיימת נקודה c בקטע (a, b) ,

$$\text{כך ש- } f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות x_1, \dots, x_n , שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש- } f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))?$$

הוכח את תשובתך.

תשובות סופיות

$$(6) \quad [0,1,1]$$

$$(7) \quad \text{א. } f(2) = 5, f(0) = -1, \text{ ב. לא.}$$

שאלות 1-5 ושאלות 8-17 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

- (1) נתונה המשוואה $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2, 3]$, מצא שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?
- (2) נתונה המשוואה $x^3 - x - 2 = 0$.
- א. מצא קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
- ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
- ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.
- הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

- (1) 0.07
- (2) א. $[1, 2]$ ב. 10 ג. $x = 1.520$

תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

שאלות

- (1) קבע בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה. הוכח את תשובתך.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:
- א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
 - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
 - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
 - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
 - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
 - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
 - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
 - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
 - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
 - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
- יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f , היא קטע.
- (1) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x) > 0$, לכל $x \in [a,b]$. הוכח שקיים $\alpha > 0$, כך ש- $f(x) \geq \alpha$, לכל $x \in [a,b]$.
- (2) תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים. הוכח ש- f חסומה.
- (3) תהי $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$ פונקציה על. הוכח ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

(4) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K , כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2 , בקטע (a, b) , מתקיים **תנאי ליפשיץ** :
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$

הוכח כי $f(x)$ רציפה בקטע (a, b) .
 * נסה להוכיח בשתי דרכים שונות.

(5) הוכח או הפרך :

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .

ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

(6) הוכח: אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il