GOOL
בשביל התירגול

# מתמטיקה א

## פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

### תוכן העניינים

# רציפות של פונקציה

## שאלות

בשאלות **2-1** בדוק את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ושרטט גם את גרף הפונקציה:

**1)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

**2)** $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} 1/x & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$.

א. בדוק את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.
ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבע מאיזה סוג היא.

בשאלות **7-4**: מה צריך להיות הערך הקבוע של $k$,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל $x$:

**4)** $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

**5)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

**6)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

**7)** $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **7** ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

[1] נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

מה צריכים להיות הערכים של הקבועים $a$ ו- $b$ בשאלות **10-8**,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

**8)**
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}\,(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

**9)**
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

**10)**
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

**הערה: שאלות 10-9 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.**

**11)** הוכח או הפרך:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**12)** ידוע ש- $f$ רציפה ו- $g$ לא רציפה.
האם $f+g$ רציפה? הוכח את טענתך.

**13)** נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$ .

הוכח או הפרך:

א. הפונקציה $f$ חסומה לכל $x$ .

ב. הפונקציה $f$ רציפה לכל $x$ .

ג. הפונקציה $f$ מונוטונית לכל $x$ .

ד. הפונקציה $f$ זוגית או אי-זוגית לכל $x$ .

**14)** תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\geq 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$ , ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל $x$ .

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל $x$ ?

**15)** תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $\left(0,1\right)$.

תהי $g$ הפונקציה המוגדרת בקטע $\left(0,2\right)$, על ידי $g\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right) & 0<x<1\\ x^2 & 1\leq x<2\end{cases}$ .

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $g$ ? נמק.

ב. האם $g$ חסומה בקטע $\left(0,2\right)$? נמק.

## תשובות סופיות

**1)** רציפה.

**2)** רציפה.

**3)** א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. ב. סליקה.

**4)** $k=1$

**5)** $k=4$

**6)** $k=\frac{2}{3}$

**7)** $k=-1$

**8)** $a=1$, $b=2$ או $a=2$, $b=1$.

**9)** $a=-2e^{-1}$, $b=e^{-1}$

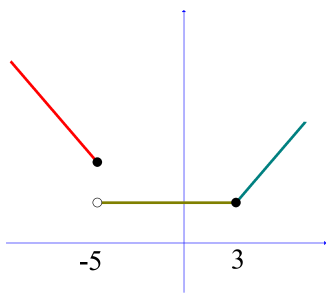
**10)** $a=\frac{e}{3}$, $b=-\frac{e}{3}$

**11)** הוכחה.

**12)** הוכחה.

**13)** א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

**14)** א.




ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב-$-5$ יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

**15)** א. לא. ב. כן.

# משפט ערך הביניים

## שאלות

בשאלות **3-1** הוכח שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-4** הוכח שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

**4)** $e^x-5x=0$

**5)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

**6)** מצא קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

**7)** נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשב את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

**8)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, המקיימות:
$f(a)<g(a), f(b)>g(b)$.
הוכח שקיימת נקודה $a<c<b$, שבה $f(c)=g(c)$.

**9)** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f\left([a,b]\right)\subseteq[a,b]$.
הוכח כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$, כך ש- $f(c)=c$.
נקודה $c$ כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

**10)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכח כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

**11)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכח כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$, כך ש- $f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכח כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$, כך ש- $f(c)=f(d)$.

**12)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכח כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$, כך ש- $f(c_1)=f(c_2)$.

**13)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכח כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$, כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

**14)** יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+\dots+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

**15)** יהי $P$ פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P\left(x\right)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכח כי ל- $P$ ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

**16)** יהיו $f,g$ פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim_{x\to\infty}f(x)=k,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-k,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=-k,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכח כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

**17)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $(a,b)$, ותהיינה $x_1,\dots,x_n$ (כאשר $n>1$) נקודות כלשהן ב-$(a,b)$.

הוכח שקיימת נקודה $c$ בקטע $(a,b)$,

כך ש-$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $(a,b)$.

האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\dots,x_n$, שונות זו מזו,

כאשר $n>1$, כך ש-$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\dots+f(x_n)\right)$?

הוכח את תשובתך.

## תשובות סופיות

**6)** $[0.1,1]$

**7)** א. $f(0)=-1\ ,\ f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-5** ושאלות **8-17** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

# שיטת החצייה

## שאלות

**1)** נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$.
בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$, מצא שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

**2)** נתונה המשוואה $x^3-x-2=0$.
א. מצא קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

## תשובות סופיות

**1)** $0.07$

**2)** א. $[1,2]$ ב. 10 ג. $x=1.520$

# תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

## שאלות

**1)** קבע בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה.
הוכח את תשובתך.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי $f$, היא קטע.

**1)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכח שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\ge\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

**2)** תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח כי $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים.
הוכח ש- $f$ חסומה.

**3)** תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכח ש- $f$ לא רציפה ב- $[0,1]$.

**4)** תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(a,b)$, ונניח שקיים קבוע ממשי $K$,
כך שלכל שתי נקודות, $x_1$ ו-$x_2$, בקטע $(a,b)$, מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$$

הוכח כי $f(x)$ רציפה בקטע $(a,b)$.

* נסה להוכיח בשתי דרכים שונות.

**5)** הוכח או הפרך:

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה $c$, אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה $c$.

ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה $c$, אז $f(x)$ רציפה בנקודה $c$.

**6)** הוכח: אם $f$ רציפה ב-$x_0$, אז קיימת סביבה של $x_0$, בה $f$ חסומה.

## תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il